

Описание эффекта дисперсионной рефракции с помощью пространственно-временной геометрической оптики

§ 1. Введение

В этой главе мы приступим к рассмотрению одного из основных вопросов монографии – описанию эффекта дисперсионной рефракции с помощью пространственно-временной геометрической оптики. Попутно попытаемся выяснить, почему стандартный вариант ПВГО не способен описать этот эффект. Как и ранее, в качестве исходного волнового уравнения будем использовать уравнение Клейна–Гордона (1.7).

Пространственно-временная геометрическая оптика – это обобщенное коротковолновое приближение, справедливое при выполнении условий [16, 31, 40]:

$$\chi = \max \left\{ \frac{\tau, \tau_0}{T_p}; \frac{\tau, \tau_0}{T_w}; \frac{\lambda, \lambda_0}{L_p}; \frac{\lambda, \lambda_0}{L_w} \right\} \ll 1. \quad (4.1)$$

Здесь χ – малый параметр, используемый при асимптотических разложениях в методе геометрической оптики, $\tau \sim 2\pi/\omega$ – средний период волны, $\lambda \sim 2\pi/k$ – средняя длина волны, τ_0 и λ_0 – временные и пространственные масштабы дисперсии, T_p и L_p – временные и пространственные масштабы вариаций параметров среды, T_w и L_w – временные и пространственные масштабы вариаций волнового поля.

Обычный вариант ПВГО исходит из уравнения эйконала и уравнения переноса, поэтому ниже напомним способы их получения.

§ 2. Уравнение эйконала и уравнение переноса

Уравнение эйконала и уравнение переноса – это два первые члена бесконечного лучевого ряда. Для получения уравнений этого ряда воспользуемся стандартной техникой разложения волновой функции U по степеням большого параметра ν , описанной, например, в [3].

Определив $\nu = 1/\chi$, будем искать решение U в виде

$$U(\mathbf{r}, t) = \exp(i\nu\Psi(\mathbf{r}, t)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r}, t)}{(i\nu)^m}, \quad (4.2)$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ и $A_m(\mathbf{r}, t)$ – фазовая и амплитудные функции радиус-вектора \mathbf{r} и времени t .

Подстановка анзатца (4.2) в волновое уравнение (1.7) приведет к цепочке уравнений, соответствующих степеням большого параметра ν . Члены порядка $O(\nu^2)$ обращаются в нуль, если

$$(\nabla\Psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} = 0. \quad (4.3)$$

(Здесь параметр среды ω_L учтен с порядком величины ν^2 , поскольку именно в этом случае свойства среды существенны для распространения волн.)

Члены, пропорциональные ν , дают

$$A_0 \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} A_0 + 2 \nabla \Psi \cdot \nabla A_0 - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0. \quad (4.4)$$

Для остальных членов высшего порядка ν^{-m} мы получим

$$\begin{aligned} A_{m+1} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} A_{m+1} + 2 \nabla \Psi \cdot \nabla A_{m+1} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial A_{m+1}}{\partial t} + \\ + \nabla^2 A_m - \frac{2}{c^2} \frac{\partial A_m}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение эйконала (4.3) – это локальное дисперсионное уравнение для среды распространения. Уравнение переноса (4.4) описывает главную компоненту амплитудного разложения, в то время как (4.5) определяет поправки более высокого порядка. В рамках общепринятой стандартной геометрической оптики обычно рассматриваются только уравнения (4.3) и (4.4). Мы перепишем их, определяя градиент $\nabla\Psi$ как локальный волно-

вой вектор $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$, и $-\partial\Psi/\partial t$ как локальную частоту $\omega(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_L^2}{c^2} = 0; \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k}A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial t} A + 2\mathbf{k} \cdot \nabla A + \frac{2}{c^2} \omega \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (4.7)$$

Из уравнения эйконала (4.6) наглядно видно, что это есть обобщение дисперсионного уравнения (1.10) для неоднородной среды.

Есть другой, менее формальный, но физически, наверное, более понятный и, с нашей точки зрения, более предпочтительный путь получения лучевых уравнений, который заключается в подстановке анзаца [11]

$$U(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp\{i\Psi(\mathbf{r}, t)\}$$

в волновое уравнение (1.7) и в разделении действительной и мнимой частей результирующего комплекснозначного уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - A(\nabla\Psi)^2 + A \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)^2 - A \frac{\omega_L^2}{c^2} + \\ + i\nabla^2\Psi A - \frac{i}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} A + i2\nabla\Psi \cdot \nabla A - i \frac{2}{c^2} \frac{\partial\Psi}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1.7a)$$

Легко видеть, что мнимая часть (1.7a) полностью совпадает с уравнением переноса (4.4), в то время как действительная часть, кроме уравнения эйконала (4.3), содержит вторые производные амплитудной функции $A(\mathbf{r}, t)$. В обычной геометрической оптике эти амплитудные добавки считаются малыми и не учитываются. В лучевом ряде они неявно присутствуют в членах высокого порядка амплитудного разложения (4.5).

Комплекснозначное уравнение (1.7a), полностью эквивалентное первоначальному волновому уравнению (1.7) для действительных функций поля, представляет интерес с физической точки зрения, поскольку в явном виде указывает на взаимосвязь первых производных фазовой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ и вторых производных амплитудной функции $A(\mathbf{r}, t)$. Оно поможет нам в дальнейшем лучше понять физический смысл плавнонеоднородной модели волнового поля, которую мы введем в этой главе.

§ 3. Стандартный вариант ПВГО

Уравнение, задающее пространственно-временные лучи в ПВГО [3, 11, 16, 40], записывается как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_g, \quad (4.8)$$

где \mathbf{V}_g – групповая скорость. Это определяет следующую взаимосвязь между полной производной d/dt и частными производными $\partial/\partial t$ и ∇ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla. \quad (4.9)$$

Используя определение групповой скорости как $\mathbf{V}_g = d\omega/d\mathbf{k}$, мы получим из локального дисперсионного уравнения (4.6):

$$\mathbf{V}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega}. \quad (4.10)$$

Дифференцируя (4.10), можно получить производную $d\mathbf{V}/dt$, которая описывает рефракционные эффекты:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{c^2}{\omega} \frac{d\mathbf{k}}{dt} - \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt}.$$

Дифференцирование (4.6) по \mathbf{r} и t дает связь между частными производными:

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{k} + \mathbf{k} \times (\nabla \times \mathbf{k}) = \frac{\omega \nabla \omega}{c^2} - \frac{\omega_L \nabla \omega_L}{c^2} \quad (4.11)$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\omega_L}{\omega} \frac{\partial \omega_L}{\partial t} = -\frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \cdot \nabla \omega + \frac{\omega_L}{\omega} \frac{\partial \omega_L}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Напомним, что

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Psi) = \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = -\nabla \omega.$$

Стандартная процедура предполагает, что в (4.11) $\mathbf{k} \times (\nabla \times \mathbf{k}) = 0$, поскольку из определения $\mathbf{k} = \nabla \Psi$ следует, что поле \mathbf{k} – безвихревое: $\nabla \times \mathbf{k} = 0$.

Это условие задает модель поля в виде локально-плоской однородной и монохроматической волны, в которой производные волнового вектора $\partial k_y / \partial x$ и $\partial k_x / \partial y$ равны между собой.

На последнее обстоятельство следует обратить особое внимание, поскольку оно, как будет показано далее, является причиной систематической ошибки стандартной ПВГО.

Покажем, что для стационарной среды, в которой $\partial\omega_L/\partial t = 0$, полная производная частоты на пространственно-временном луче равна нулю:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Действительно, в соответствии с (4.9)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla\omega.$$

С другой стороны, для стационарной среды из (4.10) и (4.12) получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla\omega.$$

Выражение для полной производной $d\mathbf{k}/dt$ следует из (4.9) и (4.11):

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} + (\mathbf{V}_g \cdot \nabla)\mathbf{k} = -\frac{\omega_L \nabla\omega_L}{\omega}.$$

Отсюда производная вектора групповой скорости может быть записана как

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -c^2 \frac{\omega_L \nabla\omega_L}{\omega^2}. \tag{4.13}$$

Итак, в однородной среде ($\nabla\omega_L = 0$)

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = 0,$$

т.е. какие-либо рефракционные явления, изменяющие направление луча, отсутствуют.

Мы видим, что локально-плоская однородная монохроматическая модель поля не описывает эффект дисперсионной рефракции.

§ 4. Новый способ получения лучевых уравнений

Основные этапы получения уравнений модифицированной ПВГО заключаются в следующем.

1. Распределение поля в точке наблюдения и ее окрестности записывается в общем виде через ряд Тейлора для амплитуды и

фазы. На этом этапе не конкретизируется модель поля, т.е. не задаются конкретные соотношения между частными производными.

2. В этой точке и ее окрестности вычисляется вектор групповой скорости.

3. В общем виде находится полная производная вектора групповой скорости вдоль луча, определяющая изменение направления его распространения, исходя лишь из общих условий применимости ПВГО (4.1).

4. Наконец, задается частная модель волнового поля.

Здесь мы будем использовать наиболее общее определение вектора групповой скорости, – как отношение среднего потока энергии $\langle \mathbf{P} \rangle$ за период быстрых осцилляций к средней плотности энергии $\langle W \rangle$ за тот же период [11, 38, 47, 66, 67]:

$$\mathbf{V}_g = \frac{\langle \mathbf{P} \rangle}{\langle W \rangle}. \quad (4.14)$$

Связь (4.14) между групповой скоростью и усредненными энергетическими характеристиками волны впервые была установлена Дж.У. Рэлеем и О. Рейнольдсом в 1877 г.

Выражение (4.10), используемое в стандартном варианте ПВГО, является частным случаем, пригодным лишь для модели локально-плоской однородной монохроматической волны. Используя определение (4.14), мы можем рассматривать более общие модели, включая слабонеоднородные волны, не выходя, естественно, за рамки геометрической оптики (4.1).

Амплитуду A и фазу Ψ волнового поля U в точке \mathbf{R}_0 , T_0 и ее окрестности представим рядом Тейлора по степеням \mathbf{r} и t :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, T_0 + t) = & \left\{ A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \right. \\ & + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \left. \right\} \exp \left\{ i \left(\Psi_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \omega t - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} t^2 - \mathbf{r} \cdot \nabla \omega t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Заметим, что в выражении (4.15) величины всех характеристик поля (\mathbf{k} , ω , ∇A и т.д.) на данном этапе никак не определены и рассматриваются лишь как некоторые константы перед степенями переменных \mathbf{r} , t для точки \mathbf{R}_0 , T_0 .

Из (4.15) получим выражения для градиента поля ∇U и производной по времени $\partial U/\partial t$. После выделения действительной части (4.15) имеем:

$$\nabla U = \left\{ \nabla A + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla A + \nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right\} \cos \Psi_1 - \left\{ A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right\} \{ \mathbf{k} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \nabla \omega t \} \sin \Psi_1; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right\} \cos \Psi_1 + \left\{ A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right\} \left\{ \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} t + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega \right\} \sin \Psi_1. \quad (4.17)$$

Здесь фаза Ψ_1 – полином второй степени по \mathbf{r} и t :

$$\Psi_1 = \Psi_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \omega t - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} t^2 - \mathbf{r} \cdot \nabla \omega t.$$

Выражения для \mathbf{P} и W следуют из (1.14), (1.15) и (4.16), (4.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & -c^2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) \cos \Psi_1 + \right. \right. \\ & + \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right) \times \\ & \times \left(\omega + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} t \right) \sin \Psi_1 \left. \right\} \left\{ \left[\left(\nabla A + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla A + \nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \cos \Psi_1 - \right. \right. \\ & - \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right) (\mathbf{k} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \nabla \omega t) \sin \Psi_1 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) \cos \Psi_1 + \right. \right. \\ & + \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\omega + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} t \right) \sin \Psi_1 \Big]^2 + \\
& + c^2 \left[\left(\nabla A + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla A + \nabla \left(\frac{\partial A}{\partial t} t \right) \right) \cos \Psi_1 - \right. \\
& - \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \right. \\
& + \left. \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right) (\mathbf{k} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \nabla \omega t) \sin \Psi_1 \right]^2 + \\
& + \left(\omega_L + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega_L + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \omega_L \right)^2 \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \right. \\
& + \left. \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \cos \Psi_1 \right\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим стационарную неоднородную среду в области высоких частот $\omega > \omega_L$.

Пусть условия применимости ПВГО (4.1) выполняются, т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} & \sim \frac{|\nabla \times \mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \sim \frac{|\nabla \omega|}{\omega} \sim \frac{\nabla^2 A}{|\nabla A|} \sim \frac{|\nabla A|}{A} \sim \frac{1}{L_w}; \quad \frac{|\nabla \omega_L|}{\omega_L} \sim \frac{1}{L_p}; \\
\frac{\partial \omega / \partial t}{\omega} & \sim \frac{\partial^2 A / \partial t^2}{\partial A / \partial t} \sim \frac{\partial A / \partial t}{A} \sim \frac{1}{T_w}; \\
\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \frac{\lambda}{L_w} & \sim \frac{\lambda}{L_p} \sim \frac{\tau}{T_w} \sim \chi \ll 1.
\end{aligned}$$

Найдем средний поток \mathbf{P} и среднюю плотность энергии W в точке \mathbf{R}_0 , T_0 и ее окрестности:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t + \xi) d\xi, \quad \langle W \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} W(\mathbf{r}, t + \xi) d\xi.$$

Интегрируя полученные выражения для \mathbf{P} и W за период $\tau = 2\pi/(\omega + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega)$, получим

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{c^2}{2\tau} \left\{ - \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \right) \left(\nabla A + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla A + \nabla \frac{\partial A}{\partial t} t \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right)^2 \times \\
& \times \left(\omega + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} t \right) (\mathbf{k} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \nabla \omega t) \Big\} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle = & \frac{1}{4\tau} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right)^2 + c^2 \left(\nabla A + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla A + \right. \right. \\
& + \left. \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right)^2 \Big\} + \frac{1}{4\tau} \left(A_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla A + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} t^2 + \right. \\
& + \left. \mathbf{r} \cdot \left(\nabla \frac{\partial A}{\partial t} \right) t \right)^2 \left\{ \left(\omega + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} t \right)^2 + c^2 (\mathbf{k} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \nabla \omega t)^2 + \right. \\
& + \left. \left(\omega_L + \mathbf{r} \cdot \nabla \omega_L + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \omega_L \right)^2 \right\}. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли членами высших порядков малости, появившихся в процессе интегрирования.

Вектор групповой скорости в точке \mathbf{R}_0 , T_0 и ее окрестности описывается формулами (4.14), (4.18), (4.19). В центральной точке \mathbf{R}_0 , T_0 , он имеет наиболее простую форму:

$$\mathbf{V}_g = c^2 \frac{\omega \mathbf{k} - (\partial A / \partial t) \nabla A / A_0^2}{\omega^2 + 0.5 \{ (\partial A / \partial t)^2 + c^2 (\nabla A)^2 \} / A_0^2}. \quad (4.20)$$

Эта формула является обобщением хорошо известного выражения (4.10) на случай амплитудно-модулированных волн. Если мы отбросим в ней члены порядка χ^2 , то мы придем к формуле, полностью совпадающей с (4.10):

$$\mathbf{V}_g = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega}.$$

Найдем полную производную d/dt вдоль луча $\mathbf{r} = \int \mathbf{V}_g dt$, определяемого полем вектора групповой скорости. Выбирая t в качестве независимой переменной и принимая во внимание, что

$$\frac{dt}{dt} = 1; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_g = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega},$$

продифференцируем вектор групповой скорости, задаваемый

формулами (4.14), (4.18), (4.19):

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2\omega_L}{\omega^2}\nabla\omega_L - \frac{c^2\omega_L^2}{\omega^3}\nabla\omega + \frac{c^4\omega_L^2}{\omega^4}(\mathbf{k}\cdot\nabla)\mathbf{k} + \frac{c^2\omega_L^3}{\omega^4}\nabla\omega_L. \quad (4.21)$$

Здесь мы отбросили члены порядка χ^2 .

Выражение (4.21) содержит все факторы, приводящие к изменению вектора групповой скорости, т.е. являющиеся причиной обычной и дисперсионной рефракции.

Покажем, что формула (4.21) содержит как частный случай стандартный вариант ПВГО. Подставляя соотношение (4.11) между частными производными (другими словами, определяя модель поля) в (4.21), получим хорошо известное выражение для производной вектора групповой скорости в стандартной ПВГО:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2\omega_L}{\omega^2}\nabla\omega_L, \quad (4.22)$$

которое полностью совпадает с (4.13).

§ 5. Модели поля

В противоположность стандартной ПВГО, общее выражение (4.21) не накладывает никаких связей на частные производные ω_L , ω и \mathbf{k} – ср. уравнения (4.11), (4.12). Например, уравнение (4.21) останется справедливым, если вектор \mathbf{k} будет иметь вихревую компоненту: $\nabla \times \mathbf{k} \neq 0$ (конечно, абсолютные значения производных должны быть малы, чтобы не выйти за условия применимости геометрической оптики (4.1)).

Рассмотрим волновое поле с поперечной частотной модуляцией в рамках стандартной ПВГО. На первом этапе, для простоты и для того чтобы в явном виде показать эффект дисперсионной рефракции, мы ограничимся случаем однородной среды ($\omega_L = \text{const}$).

Прежде всего, напомним выражения для векторных операторов:

$$(\mathbf{k}\cdot\nabla)\mathbf{k} = k_x \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} + k_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{\partial z};$$

$$\nabla \times \mathbf{k} = \left(\frac{\partial k_z}{\partial y} - \frac{\partial k_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial k_x}{\partial z} - \frac{\partial k_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

Для волны, распространяющейся вдоль оси x , волновая функция (4.15) в точке X_0, Y_0, T_0 и ее окрестности $(X_0 + x), (Y_0 + y), (T_0 + t)$ имеет следующий вид:

$$U = \left(A_0 + \frac{\partial A}{\partial x} x + \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \exp \left\{ i \left(k_x x + \frac{\partial k_y}{\partial x} xy + \frac{\partial k_x}{\partial y} yx - \omega t - \frac{\partial \omega}{\partial t} yt \right) \right\}. \quad (4.23)$$

Здесь

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2}}; \quad \frac{\partial k_y}{\partial x} = \frac{\partial k_x}{\partial y} = \frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial y}; \quad \frac{\partial A}{\partial x}; \quad \frac{\partial A}{\partial t}$$

– константы, определяющие волновое поле и его производные в начальной точке X_0, Y_0, T_0 .

В фазовой функции волны (4.23) мы задали только центральную частоту ω и ее поперечный градиент $\partial \omega / \partial y$. Производные $\partial k_y / \partial x$ и $\partial \omega / \partial t = 0$ определяются формулами (4.11) и (4.12), в то время как равенство $\partial k_y / \partial x = \partial k_x / \partial y$ следует из условия $\nabla \times \mathbf{k} = 0$.

Уравнение переноса (4.7) задает связь между частными производными амплитудной функции:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{c^2 k_x}{\omega} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Здесь следует обратить внимание на отсутствие в уравнении переноса поперечной производной $\partial A / \partial y$. Это означает, что поперечная линейная модуляция амплитуды никак не влияет на описание поля в геометрикооптическом приближении.

(Вообще говоря, можно, даже в рамках стандартной ПВГО, в качестве модели рассматривать волну с линейным изменением амплитуды в поперечном направлении, однако никакого отличия ее по сравнению с однородной плоской волной нет, в чем можно убедиться путем прямой подстановки моделей в волновое уравнение. Причина здесь в том, что вторая производная равна нулю как для константы, так и для линейной функции.)

Таким образом, у нас определены все параметры волны, соответствующие стандартной модели волнового поля.

Теперь оценим погрешность этой модели, подставляя приближенное решение (4.23) в исходное волновое уравнение (1.7). В результате этой операции получим

$$-2A \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} y - 4A \left(\frac{\omega^2}{c^4 k_x^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 y^2 -$$

$$-A\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\left(2\frac{\omega}{c^2k_x}x-t\right)^2+2i\frac{\partial A}{\partial x}\left(2\frac{\omega}{c^2k_x}-\frac{k_x}{\omega}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}y=0. \quad (4.24)$$

Максимальная невязка в окрестности точки X_0, Y_0, T_0 соответствует линейному члену с y в действительной части (4.24), а это означает, что выбранная модель поля учитывает не все эффекты, по пространственному масштабу соответствующие рефракционным явлениям. Отметим, что другой линейный член, появившийся в мнимой части (4.24), имеет более высокий порядок малости, поскольку $\partial A/\partial x \ll A\omega/c^2$.

Причина возникновения линейного члена невязки в том, что в выражении для производной \mathbf{k} величина

$$\frac{\omega}{c^2k_x} \frac{\partial\omega}{\partial y}$$

встречается дважды: в выражении для $\partial k_y/\partial x$ и в выражении для $\partial k_x/\partial y$, а "компенсирующее" их значение производной $\partial\omega/\partial y$ только один раз в выражении для ω . Таким образом, условие $\partial k_y/\partial x = \partial k_x/\partial y$, определяющее стандартную модель поля, приводит к систематической ошибке при замене точного решения модельным.

Исключить линейный член невязки можно введением модели поля с поперечной модуляцией амплитуды, для чего (4.23) умножим на некоторую, пока неизвестную плавную функцию $A_1(y)$:

$$U = A_1(y) \left[A_0 + \frac{\partial A}{\partial x} x + \frac{\partial A}{\partial t} t \right] \exp \left\{ i \left(k_x x + \frac{\partial k_y}{\partial x} xy + \frac{\partial k_x}{\partial y} yx - \omega t - \frac{\partial \omega}{\partial t} yt \right) \right\}. \quad (4.23a)$$

Остальные параметры фазовой и амплитудной функции в (4.23a) остались прежними, как и в стандартной модели поля (4.23).

Подстановка (4.23a) в уравнение (1.7) приводит к условию исчезновения линейного члена невязки:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} A_1 y = 0.$$

Решением этого уравнения является функция Эйри [24]. Отметим, что оно не нарушает условий применимости ПВГО (4.1), поскольку здесь масштаб y не выходит за зону Френеля

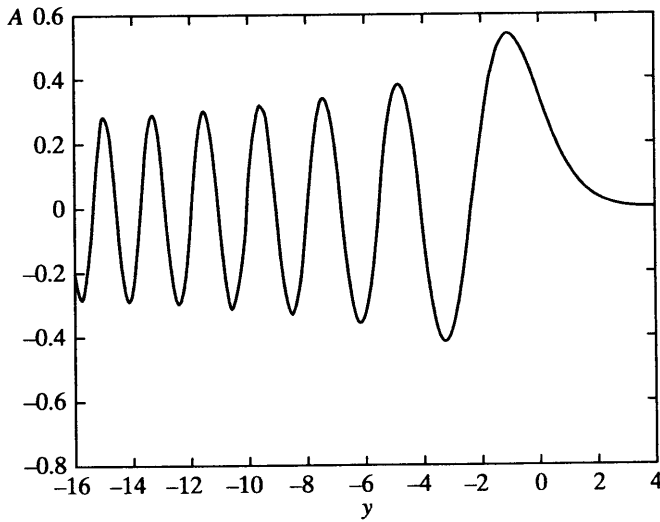


Рис. 16. Функция Эйри – решение уравнения $\frac{d^2 A}{dy^2} - Ay = 0$

$\sim \lambda$, существенную для геометрического описания поля в окрестности X_0, Y_0, T_0 . График функции Эйри показан на рис. 16.

Сейчас мы, собственно, получили хорошо известный классический результат точного решения волнового уравнения для рефракции волны в слое с линейным изменением диэлектрической проницаемости [69]. По отношению к волновому уравнению (1.7а) этим самым мы дополнили уравнение эйконала второй производной амплитуды $\nabla_{\perp}^2 A$ и ввели слабую поперечную неоднородность поля в виде функции Эйри, а по отношению к лучевому ряду (4.2) учли интегральный эффект бесконечной суммы поправок амплитуд высоких порядков, имеющий масштаб рефракционных явлений.

По отношению к стандартной модели поля (4.23) условие

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} A_1 y = 0$$

эквивалентно просто исключению из фазовой функции члена $(\partial k_y / \partial x) x y$, т.е. введению вихревой компоненты в k :

$$U = \left(A_0 + \frac{\partial A}{\partial x} x + \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \exp \left\{ i \left(k_x x + \frac{\partial k_x}{\partial y} y x - \omega t - \frac{\partial \omega}{\partial y} y t \right) \right\}. \quad (4.25)$$

Новая модель уже пригодна для описания волны с поперечной частотной модуляцией, поскольку из уравнения невязки

(4.24) исчезла систематическая ошибка в виде линейного рефракционного члена.

Для модифицированной модели величина $(\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{k} = 0$, поведение вектора групповой скорости в однородной среде, описывается его полной производной

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2 \omega_L^2}{\omega^3} \nabla_{\perp} \omega, \quad (4.26)$$

которая следует из (4.21). Здесь $\nabla_{\perp} \omega$ – коэффициент поперечной частотной модуляции.

Выражение (4.26) описывает эффект дисперсионной рефракции волны с поперечной частотной модуляцией в однородной среде. Этот эффект, связанный с изменением несущей частоты по фронту волны, определяется коэффициентом модуляции $\nabla_{\perp} \omega$ и дисперсионными свойствами среды. При отсутствии дисперсии ($\omega_L = 0$) вне зависимости от степени модуляции волны эффект отсутствует.

Покажем, что эффект дисперсионной рефракции (4.26) по своему масштабу соответствует эффекту обычной рефракции (4.22) в стандартной ПВГО.

Пусть пространственный масштаб изменения параметров среды ω_L и частоты ω равны друг другу:

$$\frac{|\nabla_{\perp} \omega_L|}{\omega_L} = \frac{|\nabla_{\perp} \omega|}{\omega} = \frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_w} = \frac{1}{L}.$$

Подстановка этих производных в (4.22) и (4.26) дает одинаковые значения производной вектора групповой скорости:

$$\frac{d|\mathbf{V}_{g\perp}|}{dt} = \frac{c^2 \omega_L^2}{\omega^2 L}.$$

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда волна с поперечной частотной модуляцией распространяется в произвольной стационарной неоднородной среде $\omega_L(\mathbf{r})$. Начнем со стандартной модели поля.

В точке X_0, Y_0, T_0 зададим следующие параметры волнового поля и среды: несущую частоту ω , частотный градиент $\nabla \omega = \mathbf{e}_y (\partial \omega / \partial y)$, собственную частоту среды ω_L и ее градиент $\nabla \omega_L = \mathbf{e}_x (\partial \omega_L / \partial x) + \mathbf{e}_y (\partial \omega_L / \partial y)$. Пусть вектор \mathbf{k} будет направлен вдоль оси x .

В соответствии с (4.11) производные вектора \mathbf{k} имеют следующие компоненты:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} = \mathbf{e}_x \left(-\frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right).$$

Из условия $\nabla \times \mathbf{k} = 0$ следует:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} = \mathbf{e}_x \left(-\frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial k_y}{\partial y}.$$

Здесь производная $\partial k_y / \partial y$ описывает лучевую расходимость.

Из (4.12) получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$$

Фазовая функция Ψ волнового поля в $(X_0 + x)$, $(Y_0 + y)$, $(T_0 + t)$ может быть записана как:

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_0 + k_x x + \frac{1}{2} \frac{\partial k_x}{\partial x} x^2 + \frac{\partial k_y}{\partial x} xy + \frac{\partial k_x}{\partial y} yx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial k_y}{\partial y} y^2 - \omega t - \frac{\partial \omega}{\partial y} yt. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Полная волновая функция выглядит следующим образом:

$$U = \left(A_0 + \frac{\partial A}{\partial x} x + \frac{\partial A}{\partial t} t \right) \exp(i\Psi). \quad (4.28)$$

Подставим приближенное решение (4.28) в волновое уравнение (1.7). Анализ полученного уравнения невязки показывает, что наибольшая ошибка между точным и приближенным решением определяется линейным членом

$$-2 \left(\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) A y.$$

По аналогии с однородной средой мы можем исключить эту систематическую ошибку, если введем плавнонеоднородную модель поля, амплитудная функция которого описывается уравнением Эйри:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) A_1 y = 0.$$

Как и в случае с однородной средой, для фазовой функции это будет эквивалентно исключению производной $\partial k_y / \partial x$ из (4.27), в результате чего мы получим модифицированную фазовую функцию Ψ_1 :

$$\Psi_1 = \Psi_0 + k_x x + \frac{1}{2} \frac{\partial k_x}{\partial x} x^2 + \frac{\partial k_x}{\partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial k_y}{\partial y} y^2 - \omega t - \frac{\partial \omega}{\partial y} yt. \quad (4.29)$$

Производная волнового вектора (4.21), определяющая рефракционные явления, для модифицированной модели поля с фазовой функцией (4.29) выражается как:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2 \omega_L}{\omega^2} \nabla \omega_L - \frac{c^2 \omega_L^2}{\omega^3} \nabla_{\perp} \omega + \frac{c^2 \omega_L^3}{\omega^4} \nabla_{\perp} \omega_L. \quad (4.30)$$

Для этой модели, так же, как и для стандартной, из (4.9) и (4.29) следует

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \omega = 0.$$

В уравнении для производной вектора групповой скорости плавнонеоднородной модели поля (4.30) по сравнению со стандартной моделью (4.13) появились две дополнительные компоненты.

Выражение

$$-\frac{c^2 \omega_L^2}{\omega^3} \nabla_{\perp} \omega$$

описывает эффект дисперсионной рефракции, а выражение

$$+\frac{c^2 \omega_L^3}{\omega^4} \nabla_{\perp} \omega_L$$

корректирует величину обычной рефракции, в том числе и для монохроматических волн.

В начальных данных для определения траектории ПВ-луча в модифицированной модели, кроме обычных для стандартной ПВГО параметров \mathbf{k} , ω , необходимо задать коэффициент поперечной частотной модуляции $\nabla_{\perp} \omega$, если волна не монохроматическая.

Дальнейшая трансформация частотной модуляции в процессе распространения может быть рассчитана из условия баланса энергии внутри лучевой трубки, как это делается в обычной геомоптике при расчетах амплитуды. Этот метод мы изложим ниже, но отметим, что в главе 5 будет развит другой, более

общий метод как для расчета амплитуды, так и для коэффициента модуляции. Далее, с целью упрощения записи, введем обозначение $\Omega = -\nabla_{\perp} \omega$.

Чтобы получить изменение амплитуды δA и коэффициента модуляции $\delta \Omega$ вдоль луча, будем использовать тот факт, что при отсутствии продольной частотной модуляции отсутствует продольное дисперсионное сжатие (или растяжение) волнового пакета и средний за период поток энергии остается постоянным в каждом сечении лучевой трубки, т.е.

$$\int_{S_0} \langle P_0 \rangle dS_0 = \int_{S_1} \langle P_1 \rangle dS_1.$$

В нашем случае плотность потока энергии $\langle P \rangle$ (4.18) в сечении \mathbf{R}_0 зависит от поперечной координаты η как:

$$\langle P_0 \rangle = \frac{c^2}{2\tau} A_0^2 (\omega - \Omega_0 \eta) \left(k - \frac{\omega}{c^2 k} \Omega_0 \eta \right).$$

Для соседнего сечения $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{V}_g dt$ мы можем записать

$$\langle P_1 \rangle = \frac{c^2}{2\tau} (A_0 + \delta A)^2 (\omega - (\Omega_0 + \delta \Omega) \eta) \left(k + \delta k - \frac{\omega}{c^2 k} (\Omega_0 + \delta \Omega) \eta \right).$$

Баланс энергии вдоль луча в двумерном случае выглядит как:

$$\begin{aligned} & \int_{-Y_0/2}^{Y_0/2} A_0^2 (\omega - \Omega_0 \eta) \left(k - \frac{\omega}{c^2 k} \Omega_0 \eta \right) d\eta = \\ & = \int_{-Y_1/2}^{Y_1/2} (A_0 + \delta A)^2 (\omega - (\Omega_0 + \delta \Omega) \eta) \times \\ & \times \left(k + \delta k - \frac{\omega}{c^2 k} (\Omega_0 + \delta \Omega) \eta \right) d\eta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь Y_0 и Y_1 – ширина лучевой трубки в сечениях \mathbf{R}_0 и \mathbf{R}_1 соответственно.

Из (4.31) получим

$$\delta \Omega = \Omega_0 \frac{Y_0 - Y_1}{Y_1}$$

и

$$\delta A = A_0 \frac{\sqrt{kY_0} - \sqrt{(k + \delta k)Y_1}}{\sqrt{(k + \delta k)Y_1}}.$$

Выпишем вместе все лучевые уравнения для плавнонеоднородной модели поля:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}_g; \\ \mathbf{V}_g &= c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= 0; \\ \frac{d\mathbf{V}_g}{dt} &= -\frac{\omega_L}{\omega^2} \nabla \omega_L - \frac{\omega_L^2}{\omega^3} \nabla_{\perp} \omega + \frac{\omega_L^3}{\omega^4} \nabla_{\perp} \omega_L; \\ \delta \Omega &= \Omega_0 \frac{Y_0 - Y_1}{Y_1}; \\ \delta A &= A_0 \frac{\sqrt{kS_0} - \sqrt{(k + \delta k)S_1}}{\sqrt{(k + \delta k)S_1}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь через Y_0 , Y_1 обозначена ширина поперечных сечений лучевой трубки вдоль градиента частоты в точках \mathbf{R}_0 , T_0 и \mathbf{R}_1 , T_1 ; S_0 и S_1 – площади сечений в тех же точках для трехмерного случая.

§ 6. Обсуждение результатов

В § 5 настоящей главы мы путем прямой подстановки локально-плоской однородной монохроматической модели волны в исходное волновое уравнение подтвердили вывод, сделанный нами в § 4 главы 1 на основе точного решения, что такая модель не способна описать все причины рефракционных явлений. Тем самым мы использовали метод невязки в качестве критерия применимости коротковолновой асимптотики.

Плоская волна как модель поля возникает естественным образом, если ограничиться двумя членами бесконечного лучевого ряда (4.2). Но из условий применимости геометрической оптики (4.1) не следует, что при описании рефракции в диспергирующей среде можно ограничиться только двумя членами ряда. Необходимо, по крайней мере, выяснить, к какой величине сходятся отбрасываемые члены.

Например, в частном случае – рефракции в слое с линейным изменением диэлектрической проницаемости – известно точное решение волнового уравнения – это волна с плавной поперечной неоднородностью амплитуды в виде функции Эйри, к которой и сходится бесконечный лучевой ряд. Для того чтобы понять, что однородные и неоднородные волны ведут себя по-разному с точки зрения рефракционных явлений, уместно вспомнить факт изменения фазовой скорости волны любой поперечной неоднородностью амплитуды (кроме линейной), констатированный нами в главе 1.

При выводе уравнений модифицированной ПВГО мы пошли не путем суммирования бесконечного лучевого ряда (что, очевидно, привело бы к тому же результату), а к прямому заданию модели поля в виде функции Эйри, обратив внимание на то, что условие

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2 \left(\frac{\omega}{c^2} \nabla_{\perp} \omega - \frac{\omega_L}{c^2} \nabla_{\perp} \omega_L \right) A y = 0 \quad (4.33)$$

исключает линейный член уравнения невязки для стандартной ПВГО, который соответствует систематической ошибке с рефракционными пространственно-временными масштабами.

Метод получения лучевых уравнений путем разложения в бесконечный ряд (4.2), несомненно корректный с математической точки зрения, нельзя считать удачным с физической точки зрения, поскольку он вуалирует целый ряд процессов, происходящих при распространении волн в средах с частотной дисперсией.

Корректировка модели позволила не только получить в явном виде геометрооптическое описание дисперсионной рефракции, но и уточнить описание обычной рефракции, о чем более подробно пойдет речь в главе 7 монографии.

По отношению к уравнению (1.7а) мы включили в уравнение эйконала вторую производную амплитуды $\nabla_{\perp}^2 A$. Здесь прослеживается некоторая аналогия с параболическим уравнением теории дифракции. В случае параболического уравнения часть фазовой функции включается в комплексную амплитудную функцию, определяя направление волны, здесь же вторая производная амплитудной функции включается в фазовую функцию и также корректирует направление распространения энергии волны.

Хотя уравнение (4.33) и задает модель поля, мы не включаем его в общий список лучевых уравнений, поскольку в явном виде

оно нам нигде не требуется. Однако "след" от плавной поперечной неоднородности амплитуды присутствует в выражении для производной dV/dt (4.30). Если первый член, содержащий оператор ∇ , соответствует стандартному (плоскому) варианту ПВГО, то последние два члена, содержащие поперечный оператор ∇_{\perp} , неявно отражают степень поперечной неоднородности амплитуды волны, о которой мы говорили в § 4 главы 1.

Использование функции Эйри в качестве модели волны, естественно, не противоречит условиям применимости лучевой асимптотики. Было бы странным, если бы точное решение простейшей рефракционной задачи противоречило асимптотике, которая, собственно, и призвана описывать рефракционные явления.

Процесс вывода уравнений модифицированного варианта ПВГО (4.32) можно значительно упростить, если первоначально выбрать модель поля и лишь затем рассчитывать вектор групповой скорости и его производную вдоль луча. Такой подход описан в [111]. Однако преимуществом изложенного подхода следует считать наличие формулы (4.21), которая позволяет в общем виде анализировать структуры волнового поля, которые могут привести к рефракции.