

**В.М. Сорокин, В.И. Каряка, Н.Ю. Кравченко**

# **ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

*Учебное пособие  
для высших учебных заведений*

**Москва  
Российский университет дружбы народов  
2019**

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3  
С65

Утверждено  
РИС Ученого совета  
Российского университета  
дружбы народов

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ведущий научный сотрудник НПК «Системы прецизионного  
приборостроения» *В.В. Сурков*;  
кандидат технических наук, заведующий лабораторией импульсной  
энергетики в геофизике № 1.3.3 ОИВТ РАН *В.А. Новиков*

**Сорокин, В. М.**

С65 Основы физики : учебное пособие для высших  
учебных заведений / В. М. Сорокин, В. И. Каряка,  
Н. Ю. Кравченко – Москва : РУДН, 2018. – 299 с. : ил.

В пособии кратко изложены все основные разделы курса общей физики для высших учебных заведений: механики, молекулярной физики и термодинамики, электромагнетизма, оптики, атомной и ядерной физики. Книга содержит тридцать четыре лекции, объединенные в тематические разделы. В конце каждого раздела приведены основные физические законы, которые изучались на лекциях и задачи для закрепления теоретического материала. В конце пособия представлены некоторые справочные материалы. Рациональное расположение материала удобно для преподавателей и студентов при изучении физики в течение двух семестров в соответствии со стандартными учебными планами. Издание может использоваться в качестве краткого справочного руководства для самостоятельной подготовки к экзаменам.

Предназначено для студентов технических и технологических специальностей высших учебных заведений.

ISBN 978-5-209-08852-3

© Сорокин В.М., Каряка В.И.,  
Кравченко Н.Ю., 2019  
© Российский университет  
дружбы народов, 2019

---



---

## СОДЕРЖАНИЕ

---



---

<b>Описание и программа курса «Физика» .....</b>	<b>6</b>
<b>Раздел 1. Механические свойства вещества .....</b>	<b>19</b>
<i>Лекция 1. Кинематика поступательного     и вращательного движения материальной точки.....</i>	<i>19</i>
<i>Лекция 2. Динамика поступательного движения     материальной точки.....</i>	<i>27</i>
<i>Лекция 3. Элементы статики и динамики     вращательного движения твердого тела.....</i>	<i>33</i>
<i>Лекция 4. Законы сохранения в механике.     Кинетическая и потенциальная энергия.....</i>	<i>39</i>
<i>Лекция 5. Механические колебания и волны.....</i>	<i>45</i>
<i>Лекция 6. Элементы релятивистской механики.....</i>	<i>53</i>
<i>Лекция 7. Механика жидкости и газа.....</i>	<i>61</i>
<i>Основные законы.....</i>	<i>66</i>
<i>Задачи.....</i>	<i>68</i>
<b>Раздел 2. Термодинамические свойства вещества .....</b>	<b>74</b>
<i>Лекция 8. Молекулярное строение вещества     и уравнения состояния.....</i>	<i>74</i>
<i>Лекция 9. Молекулярная природа макроскопических     параметров: давление, температура, теплоемкость.....</i>	<i>82</i>
<i>Лекция 10. Статистическое описание параметров     системы.....</i>	<i>88</i>
<i>Лекция 11. Законы термодинамики.....</i>	<i>95</i>
<i>Лекция 12. Физическая кинетика.....</i>	<i>101</i>
<i>Основные законы.....</i>	<i>105</i>
<i>Задачи.....</i>	<i>108</i>

<b>Раздел 3. Покоящиеся электрические заряды.....</b>	<b>111</b>
<i>Лекция 13. Электрическое поле в вакууме.....</i>	111
<i>Лекция 14. Свойства электрического поля.....</i>	116
<i>Лекция 15. Электрическое поле в диэлектриках и проводниках.....</i>	125
<i>Основные законы.....</i>	133
<i>Задачи.....</i>	134
<b>Раздел 4. Равномерное движение электрических зарядов .....</b>	<b>136</b>
<i>Лекция 16. Постоянный электрический ток.....</i>	136
<i>Лекция 17. Электрические цепи постоянного тока.....</i>	142
<i>Лекция 18. Магнитное поле в вакууме и веществе.....</i>	146
<i>Основные законы.....</i>	153
<i>Задачи.....</i>	155
<b>Раздел 5. Неравномерное движение электрических зарядов.....</b>	<b>157</b>
<i>Лекция 19. Электромагнитная индукция.....</i>	157
<i>Лекция 20. Заряженные частицы в электромагнитном поле.....</i>	164
<i>Лекция 21. Электрические колебания.....</i>	171
<i>Основные законы.....</i>	179
<i>Задачи.....</i>	180
<b>Раздел 6. Волновые свойства излучения.....</b>	<b>182</b>
<i>Лекция 22. Электромагнитные волны.....</i>	182
<i>Лекция 23. Геометрическая оптика.....</i>	188
<i>Лекция 24. Интерференция.....</i>	194
<i>Лекция 25. Дифракция.....</i>	205
<i>Лекция 26. Поляризация.....</i>	215
<i>Основные законы.....</i>	224
<i>Задачи.....</i>	226

<b>Раздел 7. Квантовые свойства излучения.....</b>	<b>229</b>
<i>Лекция 27. Квантовые свойства излучения света.....</i>	<i>229</i>
<i>Лекция 28. Квантовые свойства поглощения света.</i>	
Фотоны.....	236
<i>Основные законы.....</i>	<i>241</i>
<i>Задачи.....</i>	<i>243</i>
<b>Раздел 8. Квантовые и волновые свойства вещества... 245</b>	
<i>Лекция 29. Модели атома.....</i>	<i>245</i>
<i>Лекция 30. Волновые свойства частиц.....</i>	<i>253</i>
<i>Лекция 31. Квантовая механика частиц.....</i>	<i>260</i>
<i>Лекция 32. Атом водорода.....</i>	<i>266</i>
<i>Лекция 33. Состав атомного ядра и ядерные реакции... 270</i>	
<i>Лекция 34. Элементарные частицы.....</i>	<i>278</i>
<i>Основные законы.....</i>	<i>287</i>
<i>Задачи.....</i>	<i>288</i>
<b>Приложение.....</b>	<b>290</b>
<b>Литература.....</b>	<b>299</b>

---

---

## ОПИСАНИЕ И ПРОГРАММА КУРСА «ФИЗИКА»

---

---

Название курса: «Физика»

Рекомендуется для направления подготовки / специальности 080301 «Строительство»

Направленность программы: Базовая часть ИСб+д4 (бакалавриат)

### Цели и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины «Физика» является создание у студентов основ достаточно широкой теоретической подготовки в области физики, позволяющей ориентироваться в потоке научной и технической информации и обеспечивающей им возможность использования новых физических принципов в тех областях техники, в которых они специализируются.

Основными задачами курса физики являются:

– формирование у студентов научного мышления и современного естественнонаучного мировоззрения, в частности правильного понимания границ применимости различных физических понятий, законов, теорий и умения оценивать степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных или математических методов исследования;

– усвоение основных физических явлений и законов классической и современной физики, методов физического исследования;

– выработка у студентов приемов и навыков решения конкретных задач из разных областей физики, помогающих студентам в дальнейшем решать инженерные задачи;

– ознакомление студентов с современной научной аппаратурой и выработка у студентов начальных навыков про-

ведения экспериментальных научных исследований различных физических явлений и оценки погрешностей измерений.

### Инновационность курса

Дисциплина «Физика» входит в базовую часть математического, естественнонаучного и общетехнического цикла и является обязательной для изучения. Программа курса характеризуется более интенсивным освоением предмета, переходом к двухсеместровому изучению курса физики с соответствующим изменением количества часов, выделяемых для изучения курса, что требует методической переработки курса лекций, лабораторных работ и практических занятий.

### Структура курса

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры		
		1	2	3
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	108	-	54	54
В том числе:				
Лекции	36	-	18	18
Практические занятия (ПЗ)	36	-	18	18
Семинары (С)	-	-	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	36	-	18	18
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	114	-	57	57
В том числе:				
Курсовая работа	-	-	-	-
Расчетно-графические работы	-	-	-	-
Реферат	-	-	-	-
Контрольные работы	12		6	6
Самостоятельные домашние задания	102		51	51
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)			экз	экз
Общая трудоемкость	часов	192	108	108
	зач. ед.	6	3	3

### Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудоёмкость (час.)
1	1	Определение объёма и плотности тел, № 1	2
2		Определение ускорения силы тяжести с помощью маятника, № 2	2
3		Определение коэффициента упругости пружины, № 3	2
4		Определение моментов инерции тел с помощью крутильных колебаний, № 4	2
5		Определение моментов инерции тел с помощью маятника Максвелла, № 5	2
6	2	Определение вязкости жидкости по методу Стокса, № 6	2
7		Определение отношения удельных теплоёмкостей газа методом адиабатического расширения, № 7	2
8	3	Гальванометр в качестве амперметра и вольтметра, № 1	2
9		Измерение сопротивлений и удельного сопротивления металлов при помощи моста постоянного тока, № 2	2
10		Изучение электронного осциллографа, № 3	2
11		Изучение электрических полей при помощи зонда, № 4	2
12		Определение ёмкости конденсатора баллистическим методом, № 5	2
13		Полупроводниковый диод	2
14		Сопротивления в цепи переменного тока	2

### Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1	1	Кинематика	2
2		Динамика материальной точки и поступательного движения тела	2
3		Механическая энергия. Закон тяготения	2
4		Вращательное движение твёрдых тел	2
5		Колебательное движение	3
6	2	Молекулярно-кинетическая теория	2
7		Термодинамика	2
8		Жидкость. Пар. Твёрдое тело	2
9	3	Электростатика	2
10		Постоянный ток	2
11		Электромагнетизм	2
12		Электрические колебания. Переменный ток	2
13		Геометрическая оптика	2
14		Волновая оптика	2
15		Квантовая оптика	2
16		Атомная и ядерная физика	3

### Список обязательной и дополнительной литературы

#### а) Основная литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1999.
2. Детлаф А.А., Яворский В.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2002.
3. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1–3. – М.: Наука, 2003.
4. Балмашнов А.А., Степина С.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика: конспект лекций. – М.: РУДН, 2015.
5. Балмашнов А.А., Степина С.П. Лабораторный практикум по курсу «Общая физика. Механика. Молекулярная физика». – М.: РУДН, 2013.

6. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1997.

7. Каряка В.И., Терлецкий А.Я., Коновальцева Л.В. Лабораторные работы по механике и молекулярной физике. – М.: РУДН, 2015.

8. Каряка В.И., Кваша И.В., Коновальцева Л.В. Основные законы физики и их изучение в лабораторных работах. – М.: РУДН, 2017.

9. Лабораторный практикум по курсу «Физика». Раздел «Электричество». – М.: Изд-во РУДН, 2005.

*б) Дополнительная литература*

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – Т. 3–5. – М.: Физматлит, 2012.

2. Детлаф А.А. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2003.

3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981.

4. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1980.

## **Программа курса лекций**

### ***1. Механические свойства вещества***

*Лекция 1. Кинематика поступательного и вращательного движения материальной точки*

Представления о свойствах пространства и времени, лежащие в основе классической механики. Некоторые сведения о векторах. Два способа описания движения материальной точки. Скорость и ускорение поступательного движения материальной точки. Нормальное и тангенциальное ускорения. Радиус кривизны траектории. Угловая и линейная скорость вращательного движения материальной точки. Рав-

номерное движение по окружности. Вектор угловой скорости.

*Лекция 2. Динамика поступательного движения материальной точки*

Закон инерции и инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Масса и импульс тела. Законы динамики материальной точки и системы материальных точек. Второй закон Ньютона. Внешние и внутренние силы. Единицы и размерности физических величин. Третий закон Ньютона. Принцип относительности Галилея. Упругие силы. Силы трения. Сила тяжести и вес. Закон всемирного тяготения. Космические скорости.

*Лекция 3. Элементы статики и динамики вращательного движения твердого тела*

Угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями точек вращающегося тела. Момент силы и момент импульса механической системы. Момент силы относительно оси. Момент импульса тела относительно неподвижной оси вращения. Момент инерции тела относительно оси. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела.

*Лекция 4. Законы сохранения в механике. Кинетическая и потенциальная энергия*

Кинетическая энергия механической системы и ее связь с работой внешних и внутренних сил, приложенных к системе. Консервативные силы. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и ее связь с силой, действующей на материальную точку. Поле центральных сил. Потенциальная энергия системы. Закон сохранения механической энергии. Закон сохранения и превращения энергии. Закон сохранения импульса. Применение законов сохранения к столкновению упругих и неупругих тел.

*Лекция 5. Механические колебания и волны*

Гармонические колебания. Физический и математический маятники. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Понятие о резонансе. Одномерное распространение волны. Различные типы волн. Волновое уравнение и скорость распространения. Стоячие волны. Дисперсия и групповая скорость.

*Лекция 6. Элементы релятивистской механики*

Специальная теория относительности. Преобразования Лоренца. Интервал. Сложение скоростей. Релятивистское выражение для импульса и энергии. Взаимосвязь массы и энергии. Частицы с нулевой массой.

*Лекция 7. Механика жидкости и газа*

Несжимаемая и сжимаемая жидкость. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Равновесие свободной поверхности жидкости. Движение жидкости. Уравнение Бернулли. Ламинарное течение. Силы сопротивления в вязкой жидкости. Формула Стокса. Турбулентное течение. Закон подобия. Подъемная сила. Эффект Магнуса. Формула Кутга–Жуковского.

**2. Термодинамические свойства вещества**

*Лекция 8. Молекулярное строение вещества и уравнения состояния*

Статистический метод исследования. Термодинамический метод исследования. Термодинамические параметры. Равновесные состояния и процессы, их изображение на термодинамических диаграммах. Закон Авогадро. Уравнение состояния идеального газа. Уравнение Клапейрона–Менделеева.

*Лекция 9. Молекулярная природа макроскопических параметров: давление, температура, теплоемкость*

Средняя кинетическая энергия молекул. Молекулярно-кинетическое толкование термодинамической температуры.

Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул. Внутренняя энергия идеального газа. Работа газа при изменении его объема. Количество теплоты. Теплоемкость. Классическая молекулярно-кинетическая теория теплоемкостей идеальных газов и ее ограничения.

*Лекция 10. Статистическое описание параметров системы*

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения. Барометрическая формула. Закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле. Эргодическая гипотеза. Энтропия.

*Лекция 11. Законы термодинамики*

Первое начало термодинамики. Применение первого начала термодинамики к термодинамическим процессам идеального газа. Второе начало термодинамики. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Тепловые двигатели и холодильные машины. Теорема Карно. Энтропия идеального газа. Статистическое толкование второго начала термодинамики.

*Лекция 12. Физическая кинетика*

Явления переноса в неравновесных системах. Опытные законы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения. Молекулярно-кинетическая теория этих явлений. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Время релаксации.

### ***3. Покоящиеся электрические заряды***

*Лекция 13. Электрическое поле в вакууме*

Электрический заряд. Закон Кулона. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Напряженность и потенциал электрического поля. Связь между напряженно-

стью и потенциалом. Расчет электростатических полей методом суперпозиции.

*Лекция 14. Свойства электрического поля*

Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Остроградского–Гаусса к расчету напряженности электрического поля.

*Лекция 15. Электрическое поле в диэлектриках и проводниках*

Электрическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Диэлектрическая восприимчивость вещества. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость среды. Вычисление напряженности поля в диэлектрике. Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение зарядов в проводнике. Емкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы.

**4. Равномерное движение электрических зарядов**

*Лекция 16. Постоянный электрический ток*

Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Классическая электронная теория электропроводности металлов и ее опытные обоснования. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений. Закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение.

*Лекция 17. Электрические цепи постоянного тока*

Закон Ома для неоднородного участка цепи. Электрические цепи. Методы расчета электрических цепей. Законы Кирхгофа. Работа тока. Мощность тока. Закон Джоуля–Ленца.

*Лекция 18. Магнитное поле в вакууме и в веществе*

Магнитная индукция. Закон Ампера. Магнитное поле тока. Закон Био–Савара–Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Действие магнитного поля. Контур с током в магнитном поле. Магнитный поток. Теорема Остроградского–Гаусса. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле. Магнитное поле в веществе. Типы магнетиков. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Ферромагнетики.

**5. Неравномерное движение электрических зарядов**

*Лекция 19. Электромагнитная индукция*

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Индуктивность. Токи при замыкании и размыкании цепи. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность. Энергия системы проводников с током. Объемная плотность энергии магнитного поля.

*Лекция 20. Заряженные частицы в электромагнитном поле*

Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. Отклонение частиц электрическим и магнитным полями. Определение заряда и массы электрона. Масс-спектрографы. Ускорители заряженных частиц. Циклотрон.

*Лекция 21. Электрические колебания*

Квазистационарные токи. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления. Свободные затухающие колебания. Вынужденные колебания. Переменный ток.

**6. Волновые свойства излучения**

*Лекция 22. Электромагнитные волны*

Волновое уравнение для электромагнитного поля. Плоская электромагнитная волна. Основные характеристики

электромагнитных волн. Плотность потока энергии электромагнитного поля. Плотность импульса электромагнитного поля. Отражение и преломление электромагнитных волн.

*Лекция 23. Геометрическая оптика*

Основные законы оптики. Принцип Ферма. Скорость света. Принцип Гюйгенса. Свойства тонкой линзы. Световой поток. Сила света. Освещенность. Светимость.

*Лекция 24. Интерференция*

Монохроматическая волна. Когерентные волны. Интерференция света. Когерентные источники. Временная когерентность. Волновой цуг. Пространственная когерентность. Естественный свет. Бипризмы Френеля. Щели Юнга. Кольца Ньютона. Интерференция в тонких пленках. Голография.

*Лекция 25. Дифракция*

Дифракция Фраунгофера. Дифракция Френеля. Разрешающая способность. Принцип Гюйгенса–Френеля. Метод Френеля. Дифракции плоской волны на щели. Дифракционная решетка.

*Лекция 26. Поляризация*

Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Плоская, эллиптическая поляризация и поляризация по кругу. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Поляризация при двойном лучепреломлении. Оптическая ось кристалла. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Вращение плоскости поляризации. Магнитное вращение плоскости поляризации. Эффект Фарадея.

## **7. Квантовые свойства излучения**

*Лекция 27. Квантовые свойства излучения света*

Тепловое излучение. Энергетическая светимость тела. Испускательная способность тела. Поглощательная способность тела. Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стефана–Больцмана. Закон смещения Вина. Формула Рэлея–

Джинса. Ультрафиолетовая катастрофа. Кванты. Формула Планка. Тормозное рентгеновское излучение.

*Лекция 28. Квантовые свойства поглощения света.*

*Фотоны*

Внешний фотоэффект и его законы. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Внутренний фотоэффект. Фотоны. Масса и импульс фотона. Давление света. Опыты Лебедева. Квантовое и волновое объяснения давления света. Эффект Комптона. Корпускулярно волновой дуализм электромагнитного излучения.

### **8. Квантовые и волновые свойства вещества**

*Лекция 29. Модели атома*

Закономерности атомных спектров. Линейчатые спектры. Модель атома Томпсона. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца. Элементарная теория Бора для водородного атома.

*Лекция 30. Волновые свойства частиц*

Опытное обоснование корпускулярно-волнового дуализма свойств вещества. Формула де Бройля. Соотношение неопределенностей как проявление корпускулярно-волнового дуализма свойств материи. Волновая функция и ее статистический смысл. Ограниченность механического детерминизма.

*Лекция 31. Квантовая механика частиц*

Уравнение Шредингера. Стационарные состояния. Свободная частица. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме». Квантование энергии и импульса частицы. Понятие о линейном гармоническом осцилляторе. Туннельный эффект.

*Лекция 32. Атом водорода*

Уравнение Шредингера для атома водорода. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Спин электрона.

Спиновое квантовое число. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям. Опыт Штерна и Герлаха. Спектры атомов.

*Лекция 33. Состав атомного ядра и ядерные реакции*

Заряд, размер и масса атомного ядра. Массовое и зарядовое числа. Момент импульса ядра и его магнитный момент. Состав ядра. Нуклоны. Взаимодействие нуклонов и понятие о свойствах и природе ядерных сил. Дефект массы и энергия связи ядра. Ядерные реакции и законы сохранения.

*Лекция 34. Элементарные частицы*

Космические лучи. Методы наблюдения элементарных частиц. Четыре типа фундаментальных взаимодействий. Частицы и античастицы. Вакуум. Классификация частиц.

### Об авторах

***Каряка Владимир Иванович*** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Института физических исследований и технологий РУДН.

***Кравченко Николай Юрьевич*** – заместитель директора Института физических исследований и технологий РУДН, старший преподаватель.

***Сорокин Валерий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории электромагнитных полей Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн (ИЗМИРАН) РАН.

---

## РАЗДЕЛ 1 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

---

### Лекция 1. Кинематика поступательного и вращательного движения материальной точки

**Механика** – это раздел физики, посвященный изучению движения твердых тел, жидкостей и газов. Целью изучения движения тел является получение ответа на вопросы: как двигаются тела и почему. Ответ на первый вопрос дает кинематика, а динамика выясняет причины и законы их движения.

**Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется** механической системой.

**Материальной точкой** называется физическое тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с другими пространственными масштабами системы.

**Абсолютно твердым телом** называется тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

#### *Поступательное движение материальной точки*

**Поступательное движение** – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

Материальную точку можно представить в виде математической точки, в которой сосредоточена масса тела. Существует два способа геометрического описания движения материальной точки.

В первом способе положение материальной точки задается с помощью радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$ , который является функцией времени. Он определяет положение точки  $M$  отно-

сительно некоторой точки  $O$ , являющейся началом координат. Во втором способе положение материальной точки задается с помощью траектории, по которой движется точка, и уравнением ее движения по этой траектории. В соответствии с этими двумя способами определения положения точки существует два способа описания ее движения.

В прямоугольной системе координат вектор  $\mathbf{r}(t)$  можно представить в виде  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ . Здесь обозначены  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты (единичные векторы) осей координат. Функции  $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$  определяют параметрическое уравнение траектории. Параметром в уравнениях является время. Исключая его из уравнений, получаем равенство  $f(x, y, z) = 0$ , которое представляет собой уравнение траек-

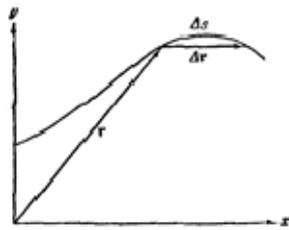


Рис. 1.1

тории движения материальной точки.

Рассмотрим положение точки в два последовательных момента времени  $t$  и  $t + \Delta t$  (рис. 1.1).

**Скоростью движения материальной точки** называется предел приращения ее радиус-вектора за

интервал времени  $\Delta t$ :

$$\mathbf{v} = \lim_{|\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Скорость является векторной величиной. Ее направление в любой точке траектории определяется направлением касательной в этой точке. Аналогично **ускорением движущейся точки** называется предел:

$$\mathbf{a} = \lim_{|\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Ускорение является также векторной величиной. Вектор ускорения расположен в плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{v}(t + \Delta t), \mathbf{v}(t)$ , и направлен внутрь вогнутости кривой.

Дифференцируя выражение радиус-вектора через координатные составляющие, находим скорость

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}.$$

Ускорение определяется второй производной по времени от радиус-вектора материальной точки:

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}.$$

Проекция вектора скорости на координатную ось равна производной по времени соответствующей координаты движущейся частицы.

### *Движение материальной точки вдоль оси $x$*

Кинематическое уравнение такого движения задается уравнением  $x = f(t)$ , где  $f(t)$  – некоторая функция времени.

**Среднее значение модуля скорости за время  $\Delta t$**  равно  $\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Определим путь  $s$ , проходимый точкой с момента

времени  $t_1$  до момента  $t_2$ . Разобьем промежуток времени  $t_2 - t_1$  на количество  $N$  малых промежутков  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$ . Весь путь представим в виде суммы путей

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i. \quad (1.1)$$

Пусть  $\Delta s$  в отличие от разности координат  $\Delta x = x_2 - x_1$  не может убывать и принимать отрицательные значения, т. е.  $\Delta s \geq 0$ . Каждое из слагаемых может быть представлено в виде  $\Delta s_i = v_i \Delta t_i$ . Следовательно,  $s = \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i$ . При стремлении всех  $\Delta t_i$  к нулю получим

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.2)$$

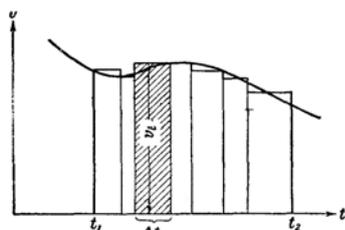


Рис. 1.2

На графике (рис. 1.2) зависимости  $v$  от времени  $t$  пройденный путь можно представить как площадь фигуры, ограниченной кривой  $v(t)$  и прямыми  $t = t_1$  и  $t = t_2$ .

**Среднее значение модуля скорости за промежуток времени  $t_2 - t_1$  равно**

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}. \quad (1.3)$$

Подставляя выражение для пройденного пути, получим

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.4)$$

### Вращательное движение материальной точки

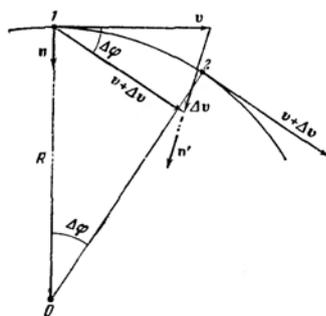


Рис. 1.3

**Вращательным движением** называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Рассмотрим криволинейный отрезок траектории движущейся точки для двух последовательных моментов времени  $t$  и  $t + \Delta t$  (рис. 1.3). Путь, пройденный материальной точкой за это время, обозначим  $\Delta s$ . Модулем скорости движущейся материальной точки называется выражение

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Это модуль вектора скорости  $\mathbf{v}(t)$ , которая была определена выше. Направление скорости определяется касательной к траектории в конце криволинейного отрезка  $s$ . Если обозначить единичный вектор касательной к траектории  $\mathbf{e}_t$ , то вектор скорости можно записать так:  $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t$ .

Пусть  $s(t)$  определяет зависимость пути от времени для тела, движущегося по некоторой траектории. Если вектор скорости определен в каждой точке кривой, то мы можем построить в некоторой произвольной точке векторы, равные векторам скорости. Кривая, проведенная через концы всех векторов, называется годографом движения  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ . Ускорение, которое показывает быстроту изменения скорости, имеет тоже направление, что и касательная к годографу. Вектор ускорения направлен внутрь кривизны траектории. Для описания движения материальной точки воспользуемся подвижной системой координат, которая перемещается с точкой по траектории. Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  расположены в плоскости  $(x, y)$ . Пусть единичный вектор  $\mathbf{e}_t$  направлен вдоль касательной к траектории движения, а единичный вектор  $\mathbf{e}_n$  направлен вдоль главной ее нормали. Проекции векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  на оси этой системы координат равны:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t; \quad \mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n.$$

Ускорения  $a_t$ ,  $a_n$  называются соответственно тангенциальным и нормальным. Выразим эти ускорения через параметры кривой и закон движения:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{e}_t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}.$$

Следовательно, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n,$$

где  $\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t$  – касательное ускорение,  $\mathbf{a}_n = v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$  – нормальное ускорение. Скорость изменения направления касательной к траектории  $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$  определяется искривлением траектории. Степень искривленности плоской кривой определяется кривизной  $C$  траектории:

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (1.5)$$

где  $\Delta \varphi$  – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на отрезок  $\Delta s$ . **Радиусом кривизны**  $R$  в данной точке кривой называется величина, обратная кривизне:

$$R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (1.6)$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_n = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_n = \frac{1}{R} v \mathbf{e}_n. \quad (1.7)$$

Вектор нормального ускорения равен:

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n. \quad (1.8)$$

Вектор ускорения частицы движущейся по плоской кривой определяется выражением

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n. \quad (1.9)$$

Модуль вектора равен

$$w = \sqrt{|\mathbf{a}_t|^2 + |\mathbf{a}_n|^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.10)$$

### Движение по окружности

Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности радиуса  $R$  :

$$\varphi = f(t).$$

Модуль угловой скорости определяется выражением (рис. 1.4)

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор угловой скорости  $\omega$  направлен вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в направлении вращения правого винта (рис. 1.5).

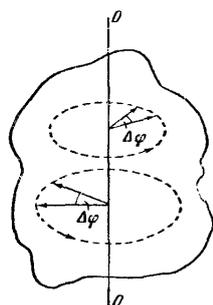


Рис. 1.4

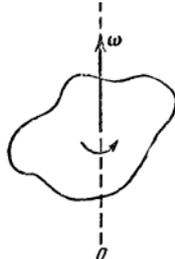


Рис. 1.5

Равномерное вращение характеризуется периодом  $T$ . **Период** – это время, за которое точка совершает один оборот на угол  $2\pi$ . Следовательно,

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.11)$$

Из этого выражения получаем

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.12)$$

Частотой  $\nu$  называется число оборотов в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.13)$$

Следовательно, угловая скорость равна числу оборотов, умноженному на  $2\pi$  :

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.14)$$

Модуль углового ускорения определяется выражением

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.15)$$

Найдем связь между модулями линейных и угловых величин, характеризующих движение точки по окружности. Величина скорости  $v$  определяется угловой скоростью вращения точки  $\omega$  и расстоянием  $R$  точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  тело повернулось на угол  $\Delta\varphi$ . Точка на расстоянии  $R$  от оси прошла путь  $\Delta s = R\Delta\varphi$ . Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (1.16)$$

Следовательно, связь между линейными и угловыми величинами определяется выражениями

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \quad (1.17)$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.18)$$

Приведем аналогию между кинематическими характеристиками поступательного и вращательного движений:

Характеристики движения	Поступательное движение	Характеристики движения	Вращательное движение
Линейная координата	$x$	Угловая координата	$\varphi$
Скорость	$v = \frac{dx}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

## Лекция 2. Динамика поступательного движения материальной точки

### *Первый закон Ньютона*

**Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.**

Система отчета, в которой выполняется этот закон, называется **инерциальной**.

Масса – количественная характеристика инертности тел.

Импульс материальной точки массой  $m$ , движущейся со скоростью  $v$  :

$$p = mv .$$

### *Второй закон Ньютона*

**Скорость изменения импульса материальной точки тела равна действующей на нее силе:**

$$dp = Fdt ,$$

где  $F$  – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Другая формулировка.

**Произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе:**

$$ma = F .$$

**Масса тела** определяется коэффициентом пропорциональности в линейной зависимости ускорения материальной точки от приложенной к ней силе, под действием которой точка двигается с ускорением.

Сила измеряется в системе единиц СИ в Ньютонах (Н), а в системе единиц СГС динах (дин).

### Третий закон Ньютона

Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 2.1):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

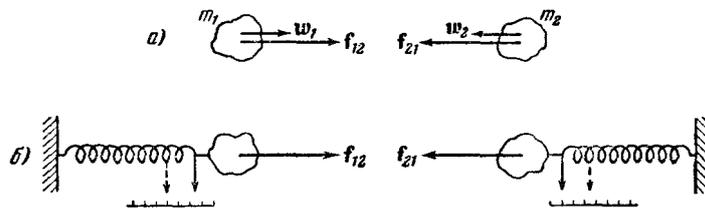


Рис. 2.1

### Принцип относительности Галилея

Система  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{v}_0$  относительно покоящейся системы  $K$  (рис. 2.2). Преобразования Галилея при движении вдоль оси  $x$ :

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Оно эквивалентно равенству

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0.$$

**Уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.**

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости

$$F = -kx,$$

где  $k$  – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость);  $x$  – абсолютная деформация;

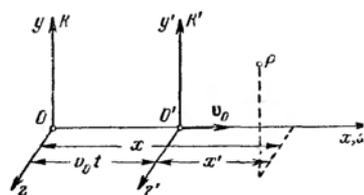


Рис. 2.2

г) сила гравитационного взаимодействия

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $m_1; m_2$  – массы взаимодействующих тел;  $r$  – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки).

### Закон всемирного тяготения

**Закон всемирного тяготения Ньютона** – сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

В векторном виде:  $\mathbf{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}$ .

Для определения силы взаимодействия протяженных тел их надо разбить на элементарные массы (рис. 2.3)

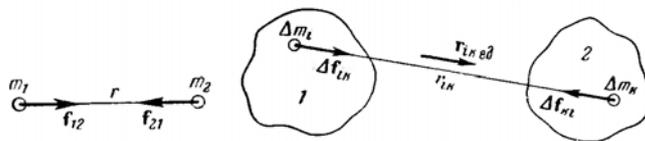


Рис. 2.3

б) сила тяжести

$$\mathbf{p} = m\mathbf{g};$$

в) сила трения (скольжения)

$$F = fN,$$

где  $f$  – коэффициент трения;  $N$  – сила нормального давления;

$\mathbf{F}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{e}_{ik}$ . Сила, с которой тело 2 действует на тело

$$1: \mathbf{F}_{12} = \gamma \sum_i \sum_k \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{e}_{ik}.$$

Размерность гравитационной постоянной:

$$[\gamma] = \frac{[F][r^2]}{[m^2]} = \frac{(ML/T^2)L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Два тела массой 100 кг на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой порядка  $10^{-6}$  Н.

**Измерения Кавендиша** методом крутильных весов (рис. 2.4) позволили получить значение  $\gamma = 6,670 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ .

Всякое тело массы  $M$  изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем гравитационное поле. Помещенное в него другое тело оказывается под действием силы. Величину  $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m}$  называют **напряженностью гравитационного поля**. Она имеет размерность ускорения.

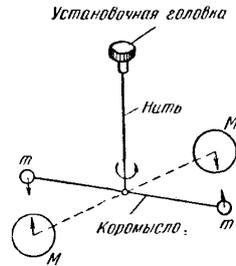


Рис. 2.4

Напряженность гравитационного поля материальной точки массы  $M$  равна  $\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$ . Потенциальная энергия точки массой  $m$  в этом поле равна  $U = -\gamma \frac{mM}{r}$ . Величину  $\varphi = \frac{U}{m}$  называют **потенциалом гравитационного поля**. Работа, совершаемая над частицей  $m$  силами поля при перемещении ее из точки 1 в точку 2, равна  $A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

### **Принцип эквивалентности**

Массы фигурируют в двух законах и характеризуют инертные  $m_{in}$  и гравитационные  $m_g$  свойства. Проведенные эксперименты показали их эквивалентность.

На поверхности Земли  $F = \gamma \frac{m_g M_3}{R_3^2}$ . Под действием этой силы тело приобретает ускорение:

$$g = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} \frac{m_g}{m_{in}}. \text{ Получено: } m_g = m_{in}. \text{ Соотношение}$$

$g = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}$  позволяет найти массу Земли, измеряя ускорение на ее поверхности и ее радиус. Получено значение  $M_3 = 5,98 \times 10^{24}$  кг. Зная радиус земной орбиты  $R_{op}$  и время полного обращения Земли вокруг Солнца  $T$ , можно найти массу Солнца  $M_C$  из условия равенства центростремительной силы  $M_3 a_n$  и силы гравитационного взаимодействия:

$$M_3 \omega^2 R_{op} = \gamma \frac{M_3 M_C}{R_{op}^2}. \quad (2.1)$$

**Первая космическая скорость**  $v_1$  определяется из условия равенства центростремительной силы и силы тяжести:

$$m \frac{v_1^2}{R_3} = mg. \quad (2.2)$$

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = \sqrt{9,8 \times 6,4 \times 10^6} \approx 8 \times 10^3 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с} \quad (2.3)$$

**Вторая космическая скорость**  $v_2$  определяется из равенства работы по удалению тела с поверхности Земли кинетической энергии, сообщенной телу. Элементарная работа на пути  $dr$  равна (рис. 2.5)

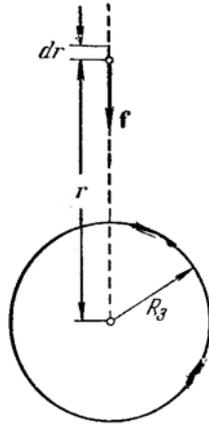


Рис. 2.5

$$dA = Fdr = \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr. \quad (2.4)$$

Работу на пути от  $R_3$  до  $r \rightarrow \infty$  находим интегрированием

$$A = \int_{R_3}^{\infty} dA = \int_{R_3}^{\infty} \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr = \gamma \frac{mM_3}{R_3}. \quad (2.5)$$

Сила тяжести равна силе гравитационного притяжения  $mg = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}$ . Получаем

$$mgR_3 = \gamma \frac{M_3 m}{R_3} = A = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Вторая космическая скорость определяется выражением:

$$v_2 = \sqrt{2gR_3} \approx \sqrt{2} \times 8 \text{ км/с} \approx 11 \text{ км/с}. \quad (2.6)$$

### Лекция 3. Элементы статики и динамики вращательного движения твердого тела

При поступательном движении все точки тела получают равные перемещения за один и тот же промежуток времени. *При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям около оси вращения.* Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение этих двух видов движения. Сложное движение рассматриваем в неподвижной системе отсчета (рис. 3.1). Движение тела можно представить как вращение с

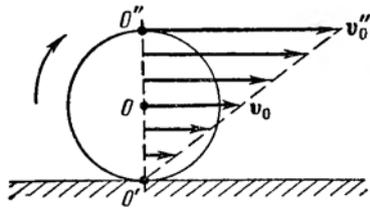


Рис. 3.1

угловой скоростью  $\omega$  в движущейся системе отсчета. Эта система отсчета движется поступательно относительно неподвижной системы со скоростью  $v_0$ . Линейная скорость  $v'$  точки с радиус-вектором  $r$ , обусловленная вращением твердого тела, равна  $v' = \omega \times r$ . Следовательно, скорость сложного движения этой точки в неподвижной системе координат имеет вид

$$v = v_0 + \omega \times r.$$

Элементарное перемещение твердого тела при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси, называемой **мгновенной осью вращения**.

#### *Движение центра масс твердого тела*

Представим тело как систему материальных точек массой  $m_i$ , взаимное расположение которых остается неизменным. На каждую из них действуют как внутренние  $f_i$ , так и внешние  $F_i$  силы. Для каждой элементарной массы запишем второй закон Ньютона:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i. \quad (3.1)$$

Сложив уравнения для всех элементарных масс, получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (3.2)$$

Так как сумма всех внутренних сил равна нулю  $\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = 0$ , то равенство упрощается:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (3.3)$$

Воспользовавшись определением радиус-вектора центра масс  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_c$  и продифференцировав это равенство, получим

$$m \mathbf{a}_c = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (3.4)$$

**Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных сил.**

### *Вращение тела вокруг неподвижной оси*

Рассмотрим две взаимодействующие частицы с силами  $\mathbf{F}_{12}$ ,  $\mathbf{F}_{21}$ , на которые действуют внешние силы  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ :

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1; \quad m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2. \quad (3.5)$$

Слева умножаем равенство векторно на  $\mathbf{r}$ :

$$m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1; \quad m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2. \quad (3.6)$$

Левые части равенства можно записать в виде:

$$m \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (3.7)$$

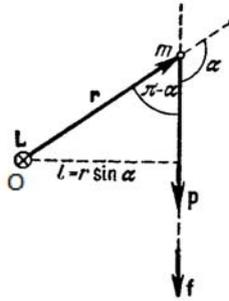


Рис. 3.2

Где обозначено  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  – момент импульса относительно точки  $O$  (рис. 3.2).

Моментом импульса системы относительно точки  $O$  называется векторная сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

Моментом импульса частицы относительно оси называется проекция вектора на эту ось:

$$L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z.$$

Модуль вектора момента импульса частицы равен  $L = rps \sin \alpha = lp$ , где  $l = r \sin \alpha$  – плечо импульса относительно точки  $O$ .

Момент силы относительно точки  $O$  (рис. 3.3) равен  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

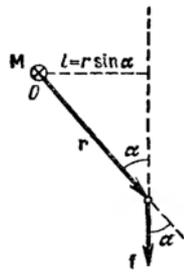


Рис. 3.3

Модуль момента силы равен  $M = rF \sin \alpha = lF$ , где  $l = r \sin \alpha$  – плечо силы относительно точки  $O$ .

Из уравнения движения (3.6) имеем

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_1; \quad \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_2. \quad (3.8)$$

Складывая, получим

$$\frac{d(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)}{dt} = (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2).$$

Обозначим полный момент импульса  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ , полный момент внешних сил  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ . Так как полный момент внутренних сил равен нулю  $\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21} = 0$ , получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (3.9)$$

**Производная по времени от момента импульса системы относительно оси равна сумме моментов внешних сил относительно этой оси.**

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменным расстоянием между ними. Момент импульса и внешних сил относительно оси вращения этой системы равен

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{M}_i.$$

Модуль момента импульса равен  $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$ , где  $R_i$  – расстояние частицы от оси вращения. Проекция момента импульса на ось  $z$  равна

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha = m_i (r_i \cos \alpha) \omega R_i = m_i R_i^2 \omega. \quad (3.10)$$

Просуммируем по всем частицам, получим

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i R_i^2. \quad (3.11)$$

Величина  $J = \sum_i m_i R_i^2$ , равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояния от некоторой оси, называется **моментом инерции тела относительно данной оси.**

$$L_z = J \omega. \quad (3.12)$$

Принимая во внимание, что  $\frac{dL_z}{dt} = M_z$ , получим **основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси  $z$ :**

$$M_z = J_z \varepsilon, \quad (3.13)$$

где  $M_z$  – результирующий момент внешних сил относительно оси  $z$ , действующих на тело;  $\varepsilon$  – угловое ускорение;  $J_z$  – момент инерции относительно оси вращения. Моменты инерции некоторых тел массой  $m$  относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс:

а) стержень длиной  $l$  относительно оси, перпендикулярной стержню,

$$J_z = ml^2/12;$$

б) обруч (тонкостенный цилиндр) относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча (совпадающей с осью цилиндра),

$$J_z = mR^2,$$

где  $R$  – радиус обруча (цилиндра);

в) диск радиусом  $R$  относительно оси, перпендикулярной плоскости диска,

$$J_z = mR^2/2.$$

Проекция на ось  $z$  момента импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси  $z$ ,

$$L_z = J_z \omega,$$

где  $\omega$  – угловая скорость тела.

Закон сохранения момента импульса системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси  $z$ ,

$$J_z \omega = const,$$

где  $J_z$  – момент инерции системы тел относительно оси  $z$ ;  $\omega$  – угловая скорость вращения тел системы вокруг оси  $z$ .

Каждое тело обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой. **Момент инерции тела относительно какой-либо оси вращения** можно определить как обратный коэффициент пропорциональности в линейной зависимости углового ускорения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и момента внешних сил относительно этой оси, под действием которых вращается тело.

Для тела с неравномерно распределенной массой плотность его определяется выражением

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (3.14)$$

Элементарная масса равна произведению плотности тела в данной точке на соответствующий элементарный объем:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i. \quad (3.15)$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

$$J = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \rho_i R_i^2 \Delta V_i = \int \rho R^2 dV. \quad (3.16)$$

Это выражение позволяет вычислять моменты инерции тел различной формы.

**Теорема Штейнера.** Момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $R$  между осями:

$$J = J_c + mR^2.$$

Приведем аналогию между динамическими характеристиками поступательного и вращательного движений:

Динамические характеристики	Поступательное движение	Динамические характеристики	Вращательное движение
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Сила	$\mathbf{F}$	Момент силы	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Импульс	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Момент импульса	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ $L_z = J\omega$
Закон Ньютона	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$	Закон динамики вращательного движения	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ $J\varepsilon = M_z$

#### Лекция 4. Законы сохранения в механике. Кинетическая и потенциальная энергия

Силы, действующие на тела системы, можно подразделить на силы **внутренние** и **внешние**. В основе сохранения энергии лежит однородность времени, равнозначность всех моментов времени. В основе сохранения импульса лежит **однородность пространства**.

Согласно второму закону Ньютона, производная по времени от суммарного импульса механической системы равна результирующей внешних сил, действующих на эту систему:  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ . Если на систему не действуют внешние силы, то  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ . Следовательно, в замкнутой системе выполняется **закон сохранения импульса**.

**Суммарный импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным:**

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = const,$$

или для двух тел ( $i = 2$ )

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2,$$

где  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  – скорости тел в начальный момент времени;  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  – скорости тех же тел в конечный момент времени.

Согласно основному закону динамики вращательного движения, производная по времени от суммарного момента импульса механической системы равна моменту результирующей внешних сил, действующих на эту систему:  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ . При отсутствии внешних сил  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ . Следовательно, в замкнутой системе выполняется **закон сохранения момента импульса**.

**Момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным:**

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \text{const} .$$

Для двух тел, составляющих замкнутую систему и вращающихся относительно неподвижной оси вращения, имеем  $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2'$ . В формуле обозначено:  $J_1, J_2$ ;  $\omega_1, \omega_2$  – моменты инерции и угловые скорости соответственно первого и второго тела в начальный момент времени. Величины со штрихами обозначают их значения в конечный момент времени.

Воспользовавшись вторым законом Ньютона для поступательного движения  $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$  и умножив это уравнение на перемещение  $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ , получим

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}dt = \mathbf{F}d\mathbf{s} .$$

Отсюда:  $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}d\mathbf{s}$ . Величина  $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$  назы-

вается кинетической энергией тела.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $z$ ,

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2};$$

$$T = J_z \omega^2 / 2 \text{ или } T = L_z^2 / 2J_z .$$

Величина  $dA = \mathbf{F}d\mathbf{s}$  называется работой силы  $\mathbf{F}$  на пути  $d\mathbf{s}$ . Проинтегрировав, получим, что работа  $A$ , совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии материальной точки:

$$A_{12} = \Delta T = T_2 - T_1 .$$

**Работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы.**

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,  $T = mv^2/2$  или  $T = p^2/2m$ .

Работа  $dA = \mathbf{F}ds = F \cos \alpha \cdot ds$ . Острый угол  $\cos \alpha > 0$  – работа положительна. Тупой угол  $\cos \alpha < 0$  – работа отрицательна. Если  $\alpha = \pi/2$  – работа равна нулю. При перемещении груза на горизонтальной плоскости работа численно равна площади фигуры на графике функции  $F = F(s)$ , ограниченной графиком  $F(s)$  и осью  $s$  (рис. 4.1).

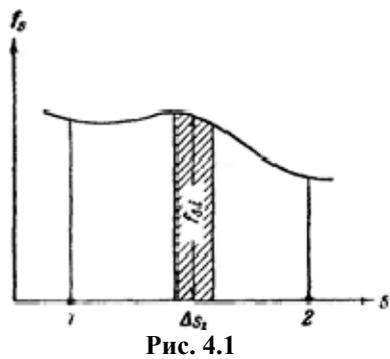


Рис. 4.1

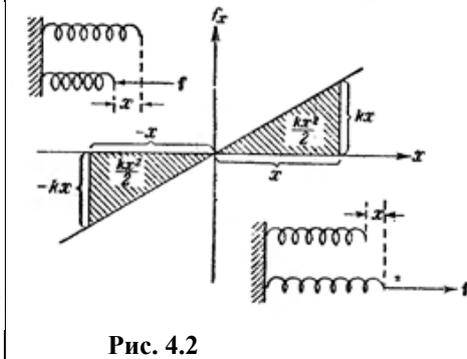


Рис. 4.2

Например, для упругой силы  $F = -kx$  работа определяется площадью заштрихованного треугольника (рис. 4.2)

$$A = \frac{1}{2} x \cdot kx = \frac{kx^2}{2}.$$

Работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности:

$$dA = \left( \sum_i \mathbf{F}_i \right) ds = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot ds = \sum_i dA_i.$$

Так как  $ds = \mathbf{v}dt$ , то  $dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt$ .

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$p = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то эта частица находится в поле сил.

Поле сил  $F = F(r)$  называется центральным.

Если  $F = const$  поле однородно. Если сила не зависит от времени, то поле стационарно.

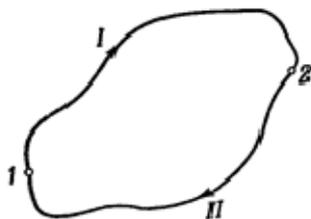


Рис. 4.3

Если работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь от начального и конечного положения частицы, и не зависит от пути, по которому двигалась частица, то такие силы называются **консервативными**.

**Работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю** (рис. 4.3).

Силы, действующие в стационарном однородном поле, консервативны.

Силы, действующие в центральном поле, консервативны.

Система СИ. Единица работы и мощности:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 10^5 \text{ дин} \cdot 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг};$$

$$1 \text{ Дж} / \text{с} = 1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг} / \text{с}.$$

Консервативные силы являются частным случаем потенциального силового поля.

Поле сил называется потенциальным, если его можно описать с помощью функции  $\Pi(x, y, z, t)$ , градиент которой определяет силу в каждой точке поля  $\mathbf{F} = \nabla \Pi$ .

**Функция**  $\Pi(x, y, z, t)$  называется потенциальной функцией или потенциалом.

В случае, когда потенциал не зависит явно от времени, потенциальное поле оказывается стационарным, а его силы – консервативными. В этом случае  $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$ , где

$U(x, y, z)$  – потенциальная энергия частицы. Для нестационарного силового поля  $\Pi(x, y, z, t)$  силы не являются консервативными.

Если работа сил не зависит от пути, то каждой точке поля можно сопоставить значение некоторой функции  $U(x, y, z)$  такой, что разность значений этой функции будет определять работу сил:  $A_{12} = U_1 - U_2$ . Пусть на частицу действуют только консервативные силы. Тогда работа, совершаемая над частицей на пути 1–2, может быть представлена в виде  $A_{12} = U_1 - U_2$ . Эта работа идет на приращение кинетической энергии частицы. Приходим к равенству  $T_2 - T_1 = U_1 - U_2$ . Из него следует, что

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

Величина  $E = T + U$  для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной.

Функция  $U(x, y, z)$  называется **потенциальной энергией во внешнем поле сил**.

Величина  $E$ , равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется **полной механической энергией частицы**.

Сила, перемещая частицу вдоль оси  $x$  на величину  $dx$ , совершает на ней работу  $dA = Fdx$ . Работа есть убыль потенциальной энергии  $dA = -dU$ . Получаем  $Fdx = -dU$ . Отсюда

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad \mathbf{F} = -\nabla U. \quad (4.1)$$

### *Закон сохранения механической энергии*

**Полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной:**

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N U_i = const .$$

Потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины

$$U = kx^2/2 ,$$

где  $k$  – жесткость пружины;  $x$  – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$U = -\gamma m_1 m_2 / r ,$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $m_1, m_2$  – массы взаимодействующих тел;  $r$  – расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$U = mgh ,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии  $h \ll R$ , где  $R$  – радиус Земли).

**Закон сохранения механической энергии**

$$E = T + U = const .$$

## Лекция 5. Механические колебания и волны

Механическими колебаниями называются повторяющиеся процессы в механических системах. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (собственные) и вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

**Свободными или собственными** называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия.

**Вынужденными** называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической изменяющейся силы.

**Автоколебания** сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляется это воздействие, задаются самой системой.

При **параметрических** колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.

**Маятник** – это твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести.



Рис. 5.1

**Математическим маятником** называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (рис. 5.1). Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\varphi$ , образованным нитью с вертикалью. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент сил:

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (5.1)$$

Момент инерции маятника равен  $J = ml^2$ . Уравнение динамики вращательного движения для маятника имеет вид  $J\varepsilon = M$ , где  $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$  – угловое ускорение. Получим  $ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$ . Это уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (5.2)$$

Для малых колебаний  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Обозначив  $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ , получим уравнение колебаний математического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (5.3)$$

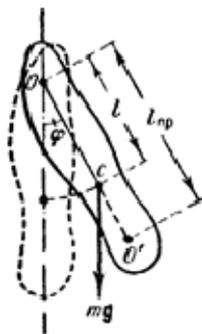


Рис. 5.2

Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести (рис. 5.2). При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент сил  $M = -mgl \sin \varphi$ , где  $l$  – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника. Обозначив  $J$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, запишем уравнение динамики вращательного движения  $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$ . Это уравнение представим в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где обозначено  $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ .

Рассмотрим колебания материальной точки вдоль оси  $x$  под действием упругой силы  $F = -kx$ , где  $k$  – жесткость

пружины. Уравнение второго закона Ньютона для материальной точки имеет вид  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ . Это уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где обозначено  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Таким образом, колебания всех трех механических систем описываются дифференциальными уравнениями одного и того же вида. Его решением является кинематическое уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $\omega_0$  – собственная угловая или циклическая частота колебательной системы;  $\alpha$  – начальная фаза.

а) Математический маятник  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  ( $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – длина нити маятника). Период собственных колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

б) Физический маятник  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$  ( $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – расстояние от точки подвеса до центра масс). Период собственных колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$ .

в) Пружинный маятник  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ( $k$  – жесткость пружины,  $m$  – масса маятника). Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

а) амплитуда результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

б) начальная фаза результирующего колебания:

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

### ***Механические колебания при наличии сил трения***

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. В простейшем случае сила сопротивления пропорциональна скорости движения системы  $F_d = -r \frac{dx}{dt}$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления. Уравнение второго закона Ньютона при наличии сил сопротивления имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}.$$

Обозначив  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.1)$$

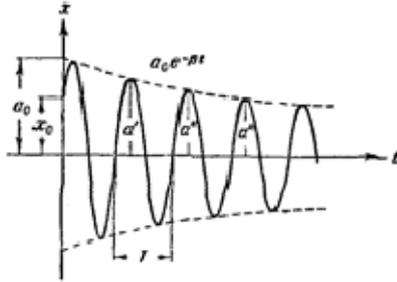


Рис. 5.3

Это дифференциальное уравнение описывает затухающие колебания системы. Его решение представляет собой кинематическое уравнение затухающих колебаний (рис. 5.3):

$$x(t) = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.2)$$

$$\text{где } \beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.3)$$

Период затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ . Декре-

мент затухания – отношение значений амплитуд в моменты времени, отличающиеся на период  $\frac{A(t)}{A(t+T)} = \exp(-\beta T)$ .

**Логарифмический декремент затухания**  
 $\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$ . Закон убывания амплитуды можно за-

писать в виде  $A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{T} t\right)$ .

За время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз, система совершает  $N = \tau/T$  колебаний. Получается

$\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N = 1$ . Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний за время, за

которое амплитуда убывает в  $e$  раз. **Добротность** колебательной системы  $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N$ .

### Вынужденные колебания

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в системе под действием периодически изменяющейся силы. Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (5.4)$$

Разделив это уравнение на  $m$ , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (5.5)$$

где  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ .

После включения вынуждающей силы через определенное время наступают установившиеся колебания (рис. 5.4). Амплитуда колебаний зависит от частоты периодически изменяющейся силы по формуле

$$A(\omega) = f_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (5.6)$$

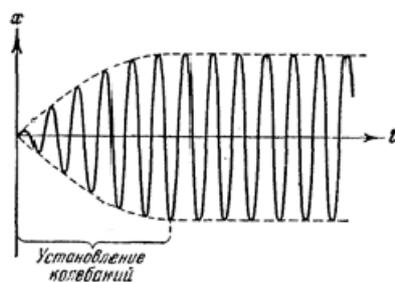


Рис. 5.4

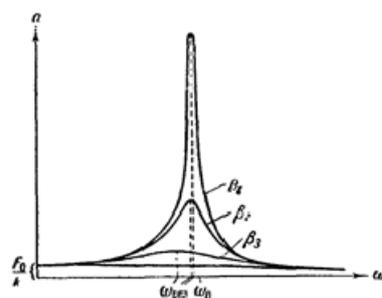


Рис. 5.5

где  $\omega$  – частота внешнего воздействия на колебательную систему. При частоте  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  возникает резонанс, при котором амплитуда колебаний достигает максимального значения (рис. 5.5)

$$A_m = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (5.7)$$

### **Одномерное распространение волны**

Процесс распространения колебаний в среде называется волной. Частицы среды, в которой распространяется волна, не переносятся волной, они совершают колебания около положения равновесия. Уравнение волны имеет вид

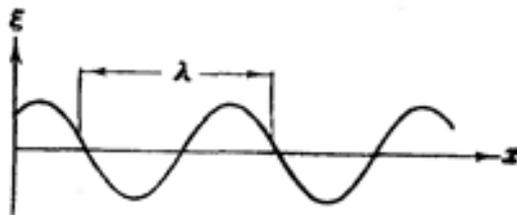
$$\xi(x, t) = f(x - vt),$$

где  $\xi(x, t)$  – смещение любой из точек среды с координатой  $x$  в момент  $t$ ;  $v$  – скорость распространения колебаний в среде,  $\varphi = x - vt$  – фаза волны.

Связь разности фаз  $\Delta\varphi$  колебаний с расстоянием  $\Delta x$  между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x,$$

где  $\lambda = vT$  – длина волны (рис. 5.6).



**Рис. 5.6**

Скорости волн:

а) продольные волны в упругой среде  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

( $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность среды);

б) продольные акустические волны в идеальном газе  
 $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$  ( $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура газа,  $M$  – молярная масса);

Синусоидальные волны:

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx),$$

где  $A$  – амплитуда волны,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны,  $\omega = 2\pi\nu$  – угловая или циклическая частота,  $\nu = 1/T$  – частота волны,  $T$  – период волны.

Стоячая волна – сумма падающей и отраженной волн:

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A \sin kx \cos \omega t = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

где  $\xi_1(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$  – падающая волна,

$\xi_2(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$  – отраженная волна.

## Лекция 6. Элементы релятивистской механики

Релятивистская механика описывает движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Эта механика учитывает требования специальной теории относительности, которая представляет собой физическую теорию пространства и времени для случая слабых гравитационных полей. Основу теории образуют два постулата, которые называются принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света.

### *Принцип относительности Эйнштейна*

*Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.*

*Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

### *Принцип постоянства скорости света*

*Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.*

В классической механике считается, что существуют абсолютное пространство и абсолютное время. Было очевидным, что два одновременных события в одной системе координат будут одновременны и в другой системе. Это утверждение противоречит принципу постоянства скорости света. Пусть тело  $K'$  движется вдоль прямой линии со скоростью  $v_0$  относительно тела  $K$  (рис. 6.1). Поместим на этой прямой два тела  $M$  и  $N$  равноудаленных от  $K'$  и жестко с ним связанных. Световой сигнал, испускаемый из центра тела  $K'$  в движущейся системе координат, будет достигать тел  $M$  и  $N$  в

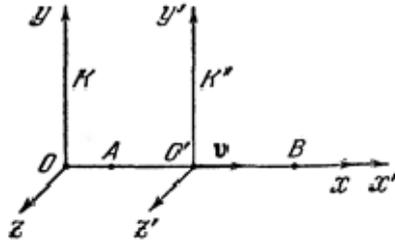


Рис. 6.1

один и тот же момент времени. В системе отсчета  $K$  тело  $M$  движется навстречу световому сигналу, в то время как тело  $N$  движется в ту же сторону, что и сигнал.

Поэтому сигнал достигнет тела  $M$  раньше, чем тела  $N$ . Следовательно,  $t_M < t_N$ . Это означает, что одновременные события в системе  $K'$  оказываются неодновременными в системе  $K$ . Другими словами, время в разных системах отсчета течет неодинаково.

Постоянство скорости света приводит к взаимосвязи пространства и времени, которое представляется с помощью воображаемого четырехмерного пространства-времени. По трем осям этого пространства откладываются пространственные координаты  $x, y, z$ , а по четвертой оси отложено  $ct$ .

**Мировая точка** – точка в четырехмерном пространстве, которой отвечает какое-либо событие.

**Мировая линия** – линия в четырехмерном пространстве, которая отвечает движению частицы.

Трехмерное пространство обладает евклидовой метрикой. В нем квадрат расстояния между двумя точками равен сумме квадратов разностей координат:  $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ .

**Интервалом** называется квадрат расстояния между двумя мировыми точками:  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ . Это псевдоевклидово пространство. Интервал является инвариантом – он одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

### *Преобразования Лоренца*

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_0$  относительно системы  $K$ . В классической механике переход от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к другой осуществляется с помощью преобразований Галилея. Из них вытекает закон сложения скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$ . Он противоречит принципу постоянства скорости света. Этому принципу удовлетворяют преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Формулы преобразования для перехода от системы  $K$  к системе  $K'$  имеют вид

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - (v_0/c^2)x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Из преобразований Лоренца вытекают следующие следствия.

**Одновременность событий в разных системах отсчета.** В системе  $K$  в точках  $x_1, x_2$  происходят одновременно события в момент  $t_1 = t_2 = t$ . В системе  $K'$  они не будут одновременными:

$$t'_1 - t'_2 = \frac{(v_0/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

если они произошли в различных точках пространства  $x_1 \neq x_2$ .

**Длина тела в разных системах.** Стержень в движущейся системе отсчета  $K'$  имеет длину  $l_0 = x'_2 - x'_1$  (рис. 6.2). Относительно покоящейся системы  $K$  он движется со скоро-

стью  $v = v_0$ . Для определения его длины в этой системе необходимо отметить координаты концов стержня  $x_1, x_2$  в один и тот же момент времени  $t_1 = t_2 = t$ . Их разность даст длину стержня  $l = x_2 - x_1$ , где:

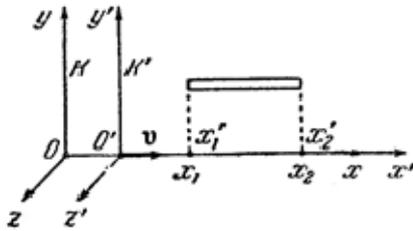


Рис. 6.2

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Из этой формулы получим  $l = l_0 \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ . Длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, меньше его длины в системе, относительно которой он покоится. Это явление называется **лоренцовым сокращением**. Визуально изменение формы тел не может быть обнаружено, так как регистрируемые импульсы света от различных участков тела испускаются не одновременно. Это искажение компенсирует лоренцово сокращение.

**Промежуток времени между событиями.** Пусть в точке  $x'_1 = x'_2 = x'$  движущейся системы  $K'$  происходят два события в моменты времени  $t'_1, t'_2$ . Этим событиям в покоящейся системе  $K$  соответствуют моменты времени:  $t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$ . Обозначив  $t_2 - t_1 = \Delta t$  и  $t'_2 - t'_1 = \Delta t'$ , получим формулу  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$ , которая связывает промежутки

времени между двумя событиями в системах  $K$  и  $K'$ . Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, называется **собственным временем** этого тела  $\tau$ . Следовательно,  $\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ . Собственное время всегда меньше време-

ни, отсчитанного по часам, движущимся относительно тела. Движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся.

Каждому событию в четырехмерном пространстве можно сопоставить мировую точку. Пусть одно событие имеет координаты  $ct_1, x_1, y_1, z_1$ , а другое событие имеет координаты  $ct_2, x_2, y_2, z_2$ . Обозначим:

$t_2 - t_1 = \Delta t$ ;  $x_2 - x_1 = \Delta x$ ;  $y_2 - y_1 = \Delta y$ ;  $z_2 - z_1 = \Delta z$ . Квадрат расстояния между мировыми точками определяется формулой

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Величина  $\Delta s$  называется **интервалом**. Так как квадрат расстояния между двумя точками в трехмерном пространстве равен  $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ , то интервал можно представить в виде

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}.$$

Интервал между двумя данными событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета:

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2.$$

Интервал является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системе к другой.

### ***Преобразование и сложение скоростей***

Пусть система  $K'$  движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_0$  относительно неподвижной системы координат  $K$ . Пусть тело движется относительно системы  $K'$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$ , а в системе  $K$  со скоростью  $v_x = \frac{dx}{dt}$ . Воспользовавшись преобразованиями Лоренца, получим

$$dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt' + (v_0/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (6.1)$$

Разделив первое равенство на второе, приходим к закону сложения скоростей при переходе от одной системы к другой:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v' / c^2}. \quad (6.2)$$

В случае малой скорости движения системы  $v_0 \ll c$  соотношение переходит в формулу сложения скоростей классической механики. Если система движется со скоростью света, то, подставив в формулу  $v_0 = c$ , получим  $v = c$ . Скорость света одинакова во всех системах отсчета.

### *Импульс в релятивистской механике*

Уравнения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, однако они не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца. Один из основных законов механики – закон сохранения импульса – не выполняется при переходе от одной инерциальной системы к другой. В релятивистской механике выражение для импульса частицы массы  $m_0$  имеет вид

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.3)$$

Это выражение можно представить в виде

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (6.4)$$

где  $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$  – промежуток собственного времени частицы, определяемый по часам, движущимся вместе с частицей,  $d\mathbf{r}$  – перемещение частицы в той же системе отсчета, в которой определяется импульс. При переходе к классической механике малых скоростей  $v \ll c$  выражение преобразуется к виду  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$ . Выражение для релятивистского им-

пульса можно представить в виде  $\mathbf{p} = m_r \mathbf{v}$ , где масса является не постоянной инвариантной величиной, а зависит от скорости по формуле

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.5)$$

Инвариантная масса  $m_0$  называется массой покоя, а неинвариантная масса  $m_r$  называется массой движения.

### *Энергия в релятивистской механике*

Уравнение второго закона Ньютона  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  становится инвариантным для релятивистского импульса:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}. \quad (6.6)$$

Умножим это равенство на перемещение частицы  $ds = \mathbf{v} dt$ . В результате получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \mathbf{v} dt = \mathbf{F} ds. \quad (6.7)$$

Правая часть равенства есть работа  $dA$ , совершаемая над частицей за время  $dt$ , которая идет на приращение ее кинетической энергии  $dT$ :

$$dT = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \mathbf{v} dt = \mathbf{v} d \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (6.8)$$

После интегрирования соотношения получим  $T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + const$ . При  $v = 0$  кинетическая энергия

$T = 0$ , следовательно,  $const = -m_0c^2$ . Релятивистское выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (6.9)$$

В случае малых скоростей  $v \ll c$  переходим к классическому выражению для кинетической энергии:

$$T = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \approx m_0c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0v^2}{2}. \quad (6.10)$$

Кроме кинетической энергии частица обладает энергией покоя  $E_0 = m_0c^2$ . Следовательно, полная энергия  $E$  частицы равна  $E = T + E_0 = T + m_0c^2$ , которая определяется формулой:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_r c^2. \quad (6.11)$$

Энергия тела и его релятивистская масса всегда пропорциональны друг другу. *Закон взаимосвязи релятивистской массы и энергии – всякое изменение энергии тела сопровождается изменением его релятивистской массы  $\Delta E = c^2 \Delta m_r$ .*

Используя выражение для импульса, эту формулу можно переписать в виде  $E = c\sqrt{p^2 - m_0^2c^2}$ . Положив в этой формуле  $m_0 = 0$ , получим  $E = cp$ . Частица с нулевой массой всегда движется со скоростью света. К числу таких частиц принадлежит фотон.

## Лекция 7. Механика жидкости и газа

**Основная задача механики жидкости** – определение пространственно-временного распределения давления и скорости внутри жидкости.

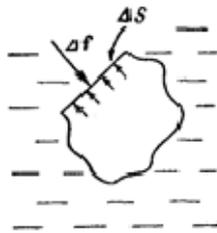


Рис. 7.1

Гидростатика – жидкость находится в покое, когда скорость каждой ее частицы равна нулю. В этом случае давление зависит от положения точки  $p = p(\mathbf{r})$ . Давление действует перпендикулярно к рассматриваемому элементу поверхности и не зависит от его ориентации (рис. 7.1).

**Несжимаемая жидкость** – независимо от величины давления ее плотность остается постоянной.

### Закон Паскаля

*Давление, оказываемое на жидкость в какой-нибудь ее точке, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.*

Действие гидравлического пресса с несжимаемой жидкостью:  $p = \frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2}$ . Силы в двух поршнях с площадями

$s_1, s_2$  связаны соотношением  $F_1 = \frac{s_1}{s_2} F_2$ . Объем перемещаемой жидкости остается постоянным:  $s_1 d_1 = s_2 d_2$ . Следовательно, работа, производимая приложенными к гидравлическому прессу силами, одинакова:  $F_1 d_1 = F_2 d_2$ , где  $F_1, F_2$  – силы, действующие на поршни,  $d_1, d_2$  – смещения поршней.

Давление  $p$  изменяется в зависимости от глубины жидкости  $z$ :

$$p = -\gamma z + p_0,$$

где  $\gamma = \frac{mg}{V} = \rho g$  – удельный вес жидкости,  $p_0$  – давление жидкости на ее поверхности при  $z = 0$ .

### Закон Архимеда

На всякое погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом, и приложенная к центру тяжести вытесненного телом объема (рис. 7.2).

Пусть  $p_1$  – давление на нижней поверхности тела,  $p_2$  – давление на верхней его поверхности (рис. 7.3). Разность давлений будет:  $p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$ . Разность давлений приводит к появлению силы  $-\Delta F = s(p_2 - p_1) = -\gamma s d = -\gamma V$ . Сила Архимеда  $F_A = \Delta F = \gamma V = \rho g V$ .

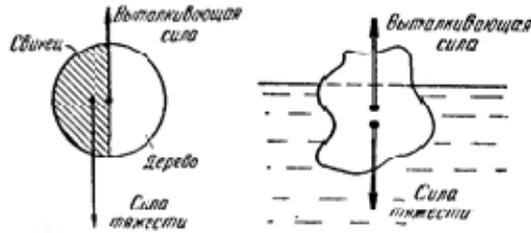


Рис. 7.2

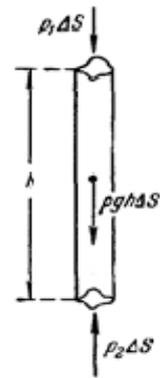


Рис. 7.3

### ***Понятия идеальной жидкости и линий тока***

**Идеальная жидкость** – несжимаемая жидкость без вязкости. Скорости меньше скорости звука и малые градиенты скоростей.

**Линии тока** – траектории, по которым движутся частицы жидкости, или это кривые, касательные к которым совпадают с направлением скорости частиц в этих точках.

Поток жидкости характеризуется векторным полем скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  и скалярным полем давлений  $p = p(\mathbf{r}, t)$ .

Стационарный поток – движение расположенных рядом не пересекающихся струек. Скорость направлена по касательной к линиям тока. В стационарном потоке вид линий тока остается неизменным (рис. 7.4). Уравнение неразрывности потока стационарного течения жидкости имеет вид (рис. 7.5)

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

где  $S_1, S_2$  – площади двух поперечных сечений трубки тока,  $v_1, v_2$  – скорости жидкости в двух поперечных сечениях трубки тока.

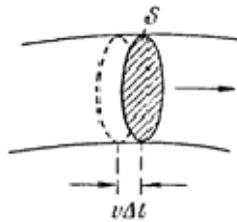


Рис. 7.4

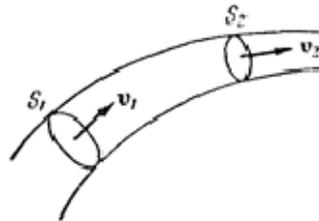


Рис. 7.5

**Уравнение Бернулли** для идеальной жидкости вдоль линии тока:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz = const .$$

Оно следует из уравнения Ньютона. Уравнение Бернулли является выражением закона сохранения энергии вдоль линии тока. Потери на трение отсутствуют. Сила давления всегда нормальна к поверхности. Полная энергия единицы объема частицы жидкости (сумма гидростатического давления  $p$ , кинетической энергии  $\rho v^2 / 2$  и потенциальной энергии  $\rho gz$ ) вдоль трубки тока остается постоянной (рис. 7.6). Действие водоструйного насоса (рис. 7.7) основано на этом законе:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2 .$$

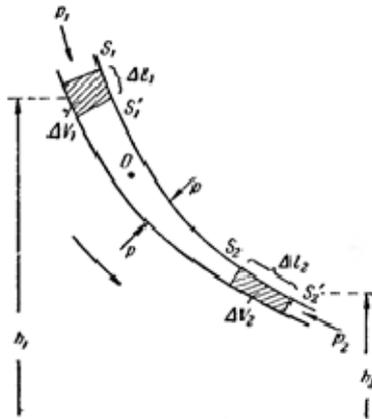


Рис. 7.6

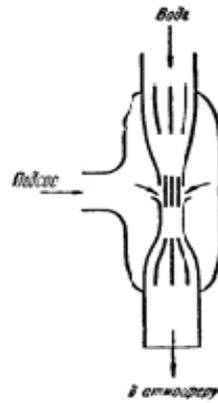


Рис. 7.7

**Формула Стокса** для малых скоростей течения жидкости определяет силу сопротивления движению шара в вязкой жидкости:

$$W = 6\pi\eta Rv_{\infty},$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости,  $R$  – радиус шара,  $v_{\infty}$  – значение скорости жидкости на бесконечности.

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = \frac{F}{l}, \text{ или } \alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где  $F$  – сила поверхностного натяжения, действующая на контур  $l$ , ограничивающий поверхность жидкости;  $\Delta E$  – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади  $\Delta S$  поверхности этой пленки.

**Формула Лапласа**, выражает давление  $p$ , создаваемое сферической поверхностью жидкости:

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

где  $R$  – радиус сферической поверхности.

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g R},$$

где  $\theta$  – краевой угол ( $\theta = 0$  при полном смачивании стенок трубки жидкостью;  $\theta = \pi$  – при полном несмачивании);  $R$  – радиус канала трубки;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными друг другу плоскостями

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g d},$$

где  $d$  – расстояние между плоскостями.

### Основные законы

**Первый закон Ньютона.** *Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

**Второй закон Ньютона.** *Скорость изменения импульса материальной точки тела равна действующей на нее силе.*

*Произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе.*

**Третий закон Ньютона.** *Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.*

**Принцип относительности Галилея.** *Уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

**Принцип относительности Эйнштейна.** *Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

**Принцип постоянства скорости света.** *Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.*

**Закон взаимосвязи релятивистской массы и энергии.** *Всякое изменение энергии тела сопровождается изменением его релятивистской массы.*

**Закон всемирного тяготения Ньютона.** *Сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.*

**Основное уравнение динамики вращательного движения.** *Производная по времени от момента импульса*

*системы относительно оси равна сумме моментов внешних сил относительно этой оси.*

**Теорема Штейнера.** *Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между ними.*

**Закон сохранения импульса.** *Импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

**Закон сохранения момента импульса.** *Момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

**Закон сохранения механической энергии.** *Полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

**Закон Паскаля.** *Давление, оказываемое на жидкость в какой-нибудь ее точке, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.*

**Закон Архимеда.** *На всякое погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом, и приложенная к центру тяжести вытесненного телом объема.*

### Задачи

1. Скорость частицы определяется выражением  $v = (3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k})t$  (м/с). Найти модуль скорости частицы в момент времени  $t = 2$  с.

2. Навстречу друг другу вдоль оси  $OX$  движутся две частицы. Частица  $m_1$  массой 3 г и скоростью 4 м/с движется слева направо. Навстречу ей движется частица  $m_2$  массой 4 г и скоростью 2 м/с. Найти проекцию скорости центра масс на ось  $OX$ .

3. Частица двигается по дуге окружности радиуса 3 м из состояния покоя с угловой скоростью, которая изменяется с течением времени по закону  $\omega = 3t^2$ . Чему равно отношение нормального и тангенциального ускорений через 3 секунды после начала движения?

4. Камень бросили вертикально вверх. Он вернулся в исходную точку через 2 с. На какую высоту поднялся камень и какая у него была начальная скорость? Сопротивлением воздуха пренебречь, камень считать материальной точкой.

5. Шарик падает с высоты 15 м. Через какое время он упадет на землю?

6. С вертолета, поднимающегося со скоростью 6 м/с, на высоте 200 м падает камень. Через какое время камень достигнет поверхности Земли?

7. Шарик брошен горизонтально с высокой башни. Каким будет радиус кривизны его траектории через 5 с после начала движения, если его начальная горизонтальная скорость равна 5 м/с?

8. Самолет движется на экваторе с востока на запад. Какова его линейная скорость, если пассажирам самолета Солнце кажется неподвижным?

9. Через 5 оборотов после начала равноускоренного вращения колеса его угловая скорость равнялась  $15 \text{ рад/с}$ . Чему равно угловое ускорение колеса?

10. Пуля, летящая горизонтально, пробивает брусок, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности. Сохраняется ли в системе пуля-брусок механическая энергия и импульс?

11. Камень, брошенный горизонтально с вышки высотой  $30 \text{ м}$ , имеет начальную скорость  $20 \text{ м/с}$ . На каком расстоянии от вышки он достигнет земли? Сколько времени он будет в движении? Какой угол составит его траектория с горизонтом в точке падения?

12. Найти силу натяжения нити с грузом массой  $2 \text{ кг}$  при их движении вниз с ускорением  $3 \text{ м/с}^2$ .

13. Подъемная сила аэростата равна  $15 \text{ кН}$ , его масса с балластом –  $1500 \text{ кг}$ . Аэростат опускается с постоянной скоростью  $v$ . После того как балласт сбросили с аэростата, он начал подниматься с той же скоростью  $v$ . Найти массу балласта.

14. Автомобиль движется равнозамедленно и проходит путь  $30 \text{ м}$  в течение  $6 \text{ с}$ . Его масса равна  $1000 \text{ кг}$ . Определить силу торможения, действующую на автомобиль.

15. Зависимость пути от времени для тела массой  $1 \text{ кг}$  выражается зависимостью  $x = 10 \sin \pi t$ . Определить силу, действующую на тело через  $1 \text{ с}$  после начала движения.

16. Материальная точка движется под действием силы, зависящей от времени по закону  $\vec{F} = 5t\vec{i} + 2t\vec{j} \text{ (Н)}$ . Определить проекцию импульса на ось  $Ox$  в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

17. Во время движения автомобиль массой  $2 \text{ т}$  испытывает воздействие силы трения, равной  $150 \text{ кг}$ . Автомобиль движется в гору с уклоном  $1 \text{ м}$  на каждые  $30 \text{ м}$  пути. Определить силу тяги автомобиля.

18. Две гири соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Массы гирь  $m_1 = 3 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 1 \text{ кг}$ . Определить

силу натяжения нити и ускорение, с которым движутся гири. Трение в блоке пренебрежимо мало.

19. Две гири одинаковой массы в  $2 \text{ кг}$  каждая соединены нитью, переброшенной через невесомый блок, укрепленный на конце стола. Одна гиря лежит на поверхности стола, перемещаясь под действием подвешенной гири. Коэффициент трения гири о стол равен  $0,2$ . Определить силу натяжения нити и ускорение, с которым движутся гири. Трение в блоке пренебрежимо мало.

20. Пулемет стреляет с частотой  $700$  выстрелов в минуту. Определить среднюю силу отдачи при стрельбе, если масса каждой пули равна  $5 \text{ г}$ , а ее начальная скорость  $700 \text{ м/с}$ .

21. Первый шарик массой  $1 \text{ кг}$  движется со скоростью  $2 \text{ м/с}$  и догоняет второй шарик массой  $4 \text{ кг}$ , перемещающийся со скоростью  $1 \text{ м/с}$ . Удар является центральным. Определить скорости шариков после удара, считая удар а) абсолютно упругий; б) абсолютно неупругий.

22. Обруч скатывается без проскальзывания с горки высотой  $3 \text{ м}$ . Какова его скорость у основания горки (трением пренебречь).

23. Шарик массой  $0,5 \text{ кг}$  брошен горизонтально с высоты  $30 \text{ м}$ . Определить кинетическую и потенциальную энергию шарика через  $1 \text{ с}$  после начала движения. Начальная скорость шарика равна  $20 \text{ м/с}$ .

24. Потенциальная энергия частицы задается функцией  $U = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ . Определить  $F_z$  – компоненту вектора силы, действующей на частицу в точке  $A(2, 1, 3)$ .

25. В шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. Расстояние от точки подвеса до центра шара равно  $2 \text{ м}$ . Стержень с шаром после удара отклонился на  $5^\circ$ . Определить скорость пули, считая, что масса пули пренебрежимо мала по сравнению с массой шара.

26. Импульс материальной точки изменяется по закону  $\vec{p} = 2t\vec{i} + 4t\vec{j}$  ( $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$ ). Чему равен модуль силы, действующий на точку, в момент времени  $t=2 \text{ с}$ ?

27. Определите момент импульса и момент инерции земного шара относительно оси вращения.

28. Величина момента импульса тела изменяется со временем по закону  $L = 3t^2 + 5t - 8$  (в единицах СИ). Чему равен момент инерции тела, если в момент времени, равный  $1 \text{ с}$ , угловое ускорение составляет  $2 \text{ с}^{-2}$ ?

29. Однородный диск вращается с угловой скоростью  $40 \text{ рад}/\text{с}$ . Его момент инерции равен  $50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Диск останавливается через  $10 \text{ с}$ . Определить момент сил торможения.

30. Шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения  $5 \text{ об}/\text{с}$ . Его масса и диаметр равны  $1 \text{ кг}$  и  $5 \text{ см}$  соответственно. Определить кинетическую энергию шара.

31. При вычислении кинетической энергии шара не учитывали его вращение. Определить, какая получилась при этом относительная ошибка.

32. С наклонной плоскости высотой  $1 \text{ м}$  скатываются диск, обруч и шар, начальные скорости которых равны нулю. Определить линейные скорости всех тел и сравнить их со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

33. Траектория движения велосипедиста представляет собой мертвую петлю радиусом  $4 \text{ м}$ . С какой наименьшей высоты должен съехать велосипедист, чтобы (по инерции и без трения) не оторваться от дорожки в верхней точке траектории. Масса велосипедиста вместе с велосипедом равна  $70 \text{ кг}$ . На колеса приходится масса  $4 \text{ кг}$ . Считать колеса велосипеда обручами.

34. Определить зависимость скорости понижения уровня воды в цилиндрическом сосуде с отверстием в дне от

высоты этого уровня  $h$ . Диаметр сосуда  $D$ , диаметр отверстия в дне сосуда  $d$ .

35. За секунду в сосуд наливается  $1$  л воды. Каким должен быть диаметр отверстия в дне сосуда, чтобы уровень воды в сосуде поддерживался постоянным и равным  $40$  см?

36. Плотность жидкости в  $2$  раза больше плотности шарика, который всплывает в этой жидкости с постоянной скоростью. Определить отношение силы трения к силе тяжести, действующее на всплывающий шарик.

37. Динамическая вязкость воздуха равна  $1,2 \cdot 10^{-5}$  Па·с. В воздухе падает капля дождя диаметром  $0,2$  мм. Определить максимальную скорость капли.

38. В сосуде поддерживается постоянный уровень глицерина, динамическая вязкость которого  $0,5$  Па·с. В боковой поверхности сосуда расположен капилляр длиной  $2$  см и радиусом  $1$  мм. Уровень глицерина находится на  $0,2$  м выше капилляра. Определить, через какое время из капилляра вытечет  $3$  см<sup>3</sup> глицерина.

39. Масса движущегося с большой скоростью электрона в  $1,5$  раза больше его массы покоя. С какой скоростью движется электрон?

40. Определить изменение массы при ядерной реакции деления двух молей урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , если при делении одного ядра урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  выделяется энергия  $200$  МэВ.

41. Определить релятивистское сокращение размеров мезона, скорость которого составляет  $90\%$  скорости света.

42. Нестабильная частица движется со скоростью, равной  $98\%$  скорости света. Во сколько раз изменится продолжительность ее существования по часам неподвижного наблюдателя?

43. Предмет движется со скоростью  $0,7c$  ( $c$  – скорость света). Определить изменение его длины в неподвижной системе отсчета.

44. Амплитуда затухающего колебания уменьшилась в 3 раза за 50 мс. Чему равен коэффициент затухания?

45. Определить максимальное ускорение колеблющейся по гармоническому закону точки, если ее период колебаний равен 2 с, а амплитуда – 8 см.

46. Две колеблющиеся точки отстоят от источника колебаний на расстояниях 20 и 32 м. Скорость распространения волны равна 150 м/с, период колебаний равен 0,02 с. Определить разность фаз колебаний точек.

47. Частоту упругой волны увеличивают в 3 раза при неизменной ее скорости. Во сколько раз изменится интенсивность волны?

48. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ , имеет вид  $\zeta = 0,02 \sin(10t - 3x)$ . Определить амплитуду ускорения колебаний частиц среды.

---

## РАЗДЕЛ 2 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

---

### Лекция 8. Молекулярное строение вещества и уравнения состояния

**Молекулярная физика** изучает строение вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений.

Любое тело состоит из атомов или молекул. Доказательством является броуновское движение. Это хаотическое движение частиц размером порядка  $10^{-4}$  см под действием ударов молекул. Его можно непосредственно наблюдать. Это движение служит экспериментальным обоснованием механической теории тепла.

**Целью молекулярно-кинетической теории** является определение наблюдаемых свойств вещества, основываясь на суммарном результате действия молекул.

Используется статистический метод, основанный на рассмотрении средних величин, характеризующих движение большой совокупности частиц.

**Термодинамика** изучает макроскопические свойства тел и явлений природы, игнорируя их микроскопическую структуру.

В основе термодинамики лежит несколько фундаментальных законов – **начал термодинамики**.

#### *Масса и размеры молекул*

Относительной молекулярной массой (молекулярной массой)  $M_r$  вещества называется отношение массы молекулы этого вещества к  $1/12$  массы атома  $^{12}\text{C}$ .

Атомная единица массы (а.е.м.)  $m_{e0}$  называется единица массы, равная 1/12 массы атома  $^{12}\text{C}$ .

Масса молекулы, выраженная в килограммах, будет равна  $M_r m_{e0}$ .

Количество вещества определяется числом молекул, содержащихся в теле. Количество вещества выражается в молях.

Количество вещества, в котором содержится число молекул, равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ , называется **молем**.

Число молекул, содержащихся в моле вещества, называется **числом Авогадро**  $N_A$ . Из опыта

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Количество вещества тела равно  $\nu = N/N_A$ , где  $N$  – число молекул, составляющих тело;  $N_A$  – число Авогадро.

Молярная масса вещества – это масса одного моля:

$$M = m/\nu = N_A m/N = N_A M_r m_{e0},$$

где  $m$  – масса однородного тела;  $\nu$  – количество вещества этого тела.

Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum n_i A_{r,i},$$

где  $n_i$  – число атомов  $i$ -го химического элемента, входящих в состав молекулы данного вещества;  $A_{r,i}$  – относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева.

Количество вещества смеси газов

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = N_1/N_A + N_2/N_A + \dots + N_n/N_A$$

или

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n},$$

где  $v_i, N_i, m_i, M_i$  – соответственно количество вещества, число молекул, масса, молярная масса  $i$ -го компонента смеси.

Для углерода  $^{12}\text{C}$  молярная масса равна  $M = 12 \text{ г/моль} = 0,012 \text{ кг/моль}$ , а масса атома равна  $12m_{\text{ед}}$ . Подставляя в  $M = N_A M_r m_{\text{ед}}$ , получим

$$0,012(\text{кг/моль}) = N_A(1/\text{моль})12m_{\text{ед}}.$$

Отсюда получим

$$m_{\text{ед}}(\text{кг}) = \frac{0,001(\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1})}{N_A(\text{моль}^{-1})} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ кг}.$$

Следовательно, масса любой молекулы равна  $1,66 \times 10^{-27} \cdot M_r \text{ кг}$ . Отсюда следует, что произведение  $N_A m_{\text{ед}} = 1 \text{ г/моль} = 0,001 \text{ кг/моль}$ . Таким образом,  $M = M_r \text{ г/моль} = 0,001 M_r \text{ кг/моль}$ .

**Масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.**

Оценка размеров молекулы воды – отношение объема моля воды к числу молекул в моле. Масса моля воды (18 г) занимает объем  $18 \text{ см}^3 = 18 \times 10^{-6} \text{ м}^3$ . На долю одной молекулы приходится объем, равный  $18 \times 10^{-6} / 6 \times 10^{23} = 30 \times 10^{-30} \text{ м}^3$ . Диаметр молекулы равен  $\sqrt[3]{30 \times 10^{-30}} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ м} = 3 \text{ \AA}$ .

### *Состояние системы, процесс*

**Системой** называется совокупность рассматриваемых тел. Величины, характеризующие состояние системы (температура, давление, объем и т.д.), называются **параметрами состояния**. Не всегда какой-либо параметр имеет определенное значение. Например, если температура в разных точках тела неодинакова, то телу нельзя приписать определенное

значение параметра  $T$ . Такое состояние называется **неравновесным**. Если такое тело изолировать от других тел и предоставить самому себе, то температура примет одинаковое для всех точек значение. В этом случае тело находится в **равновесном** состоянии. Температура остается постоянной до тех пор, пока тело не будет выведено из равновесного состояния воздействием извне. То же самое относится и к другим параметрам системы.

Процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное состояние называется **процессом релаксации**. Время, затрачиваемое на такой переход, называется **временем релаксации**. Для каждого параметра системы имеется свое время релаксации. Наибольшее из времен является временем релаксации системы. Пример – движение поршня в цилиндрическом сосуде. Давление под поршнем будет отличаться от давления в остальном объеме газа. После остановки поршня давление во всем объеме газа выравнивается.

**Равновесным состоянием системы** называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся сколь угодно долго при неизменных внешних условиях.

Всякий процесс (переход системы из одного состояния в другое) (рис. 8.1) связан с нарушением равновесия системы. Система проходит через последовательность неравновесных состояний. Если процесс протекает медленно, то газ в каждый момент времени будет характеризоваться определенным значением параметров. Процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется **равновесным**. При достаточно медленном протекании реальные процессы могут приближаться к равновесному процессу сколь угодно близко.

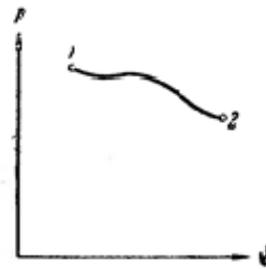


Рис. 8.1

Равновесный процесс может быть проведен в обратном направлении. Система будет проходить в обратной последовательности те же состояния. Поэтому равновесные процессы называют также **обратимыми**. Процесс, при котором система возвращается в исходное состояние, называется **круговым процессом** или **циклом**.

### *Уравнение состояния идеального газа*

Состояние определенной массы газа определяется заданием параметров: давления, объема и температуры  $p, V, T$ . Связь между ними  $F(p, V, T) = 0$  называется уравнением состояния. Газ, взаимодействие между молекулами которого пренебрежимо мало, называется **идеальным газом**. Всякий реальный газ при достаточном разрежении близок по своим свойствам к идеальному газу. Его параметры с хорошей точностью подчиняются уравнению состояния идеального газа:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}.$$

**Закон Авогадро:** моли всех газов занимают при одинаковых условиях одинаковый объем. В частности, при нормальных условиях  $T = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$  и давлении 1 атм ( $p = 1,01 \times 10^5\text{ Па}$ ), объем моля любого газа равен 22,4 л/моль или  $V = 22,4 \times 10^{-3}\text{ м}^3 / \text{моль}$ . Когда количество газа равно одному молю, величина константы будет одинакова для всех газов  $pV_m = RT$ . Это уравнение состояния для одного моля газа.  $R$  – **газовая постоянная**:

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1,01 \times 10^5 \cdot 22,4 \times 10^{-3}}{273} = 8,31\text{ Дж/моль} \cdot \text{K}$$

Так как  $\nu$  молей газа занимают объем в  $\nu$  раз больше ( $V = \nu V_m$ ), то получаем **уравнение Менделеева–Клапейрона** (уравнение состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (8.1)$$

где  $m$  – масса газа,  $M$  – молярная масса газа,  $R$  – молярная газовая постоянная,  $\nu$  – количество вещества,  $T$  – термодинамическая температура.

Другой вид уравнения состояния идеального газа. Введем **постоянную Больцмана**

$$k = R/N_A = 8,31/6,022 \times 10^{23} = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Получим

$$pV = \nu RT = \frac{\nu RT N_A}{N_A} = \nu N_A kT = NkT, \quad (8.2)$$

$$p = nkT, \quad (8.3)$$

где  $n = N/V$  – концентрация молекул.

Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения Менделеева–Клапейрона для изопроцессов (рис. 8.2):

а) закон Бойля–Мариотта (изотермический процесс:  $T = const, m = const$ ):

$$pV = const$$

или для двух состояний газа:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

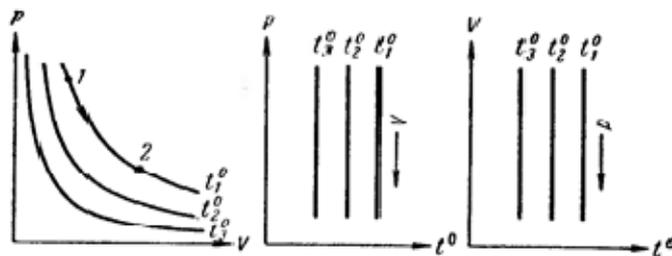


Рис. 8.2

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс:  
 $p = const, m = const$ ):

$$\frac{V}{T} = const$$

или для двух состояний газа

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс:  
 $V = const, m = const$ ):

$$\frac{p}{T} = const$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$

г) объединенный газовый закон ( $m = const$ ):

$$\frac{pV}{T} = const \text{ или } \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где  $p_1, V_1, T_1$  – давление, объем и температура газа в начальном состоянии;  $p_2, V_2, T_2$  – те же величины в конечном состоянии.

**Закон Дальтона**, определяющий давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

где  $p_i$  – парциальные давления компонентов смеси;  $n$  – число компонентов смеси.

Парциальным давлением называется давление газа, которое производил бы этот газ, если бы только он один находился в сосуде, занятом смесью.

**Молярная масса смеси газов:**

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n},$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го компонента смеси;  $\nu_i = m_i/M_i$  – количество вещества  $i$ -го компонента смеси;  $n$  – число компонентов смеси.

Массовая доля  $i$  – компонента смеси газа (в долях единицы или процентах):

$$w_i = m_i/m,$$

где  $m$  – масса смеси.

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho N_A}{M},$$

где  $N$  – число молекул, содержащихся в данной системе;  $\rho$  – плотность вещества;  $V$  – объем системы. Формула справедлива не только для газов, но и для любого агрегатного состояния вещества.

## Лекция 9. Молекулярная природа макроскопических параметров: давление, температура, теплоемкость

Газ находится в равновесии – молекулы движутся хаотически.

### Число ударов молекул о стенку

Рассмотрим равновесное состояние идеального газа. Молекулы в нем движутся вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений (рис. 9.1). Если их концентрация  $N$ , то в каждом направлении движется  $N/3$ , а в каждую сторону –  $N/6$  молекул. Полагаем, что все молекулы движутся с одинаковой скоростью, равной их средней скорости  $\langle v \rangle$ . За время  $\Delta t$  до элемента стенки  $\Delta S$  долетят молекулы, заключенные в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $\langle v \rangle \Delta t$ . Их число равно  $\Delta N_0 = \frac{1}{6} n \Delta S \langle v \rangle \Delta t$ . Следовательно, число ударов молекул об единичную площадку в единицу времени равно  $\nu = \frac{\Delta N_0}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$ .

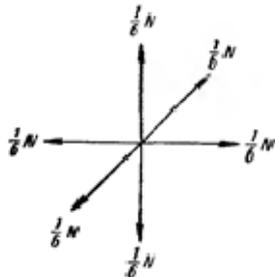


Рис. 9.1

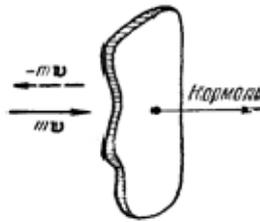


Рис. 9.2

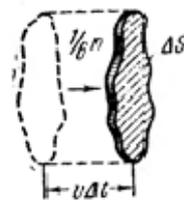


Рис. 9.3

### *Давление газа на стенку*

Стенки сосуда, в котором заключен газ, подвергаются непрерывным ударам молекул. В результате ударов о стенку они передают в единицу времени элементу стенки  $\Delta S$  некоторый импульс, который равен силе, действующей на этот элемент. Отношение силы к величине  $\Delta S$  дает давление, оказываемое газом на стенки сосуда. Если предположить, что молекулы отскакивают от стенки по закону зеркального отражения и величина скорости не изменяется (рис. 9.2), то импульс  $\Delta K$ , сообщаемый при ударе о стенку, будет равен:

$$\Delta K = 2m\langle v \rangle.$$

Умножив этот импульс на число ударов молекул  $\nu = \frac{1}{6}n\langle v \rangle$  о стенку площадью  $\Delta S$ , получим импульс, сообщаемый единичной площадке в единицу времени (рис. 9.3). Эта величина является давлением газа на стенку  $p = \Delta K / \Delta S \Delta t$ :

$$p = \frac{1}{6}n\langle v \rangle \cdot 2m\langle v \rangle = \frac{1}{3}nm\langle v \rangle^2. \quad (9.1)$$

Обозначив  $\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{m\langle v \rangle^2}{2}$  – среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул, получаем **основное уравнение кинетической теории газов**

$$p = \frac{2}{3}n\langle \varepsilon_n \rangle. \quad (9.2)$$

### *Средняя энергия молекулы*

Запишем выражение для давления, возникающего при ударе молекул о стенки сосуда, и уравнение состояния идеального газа:

$$p = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon_n\rangle, \quad p = nkT. \quad (9.3)$$

Из сравнения этих выражений следует равенство

$$\langle\varepsilon_n\rangle = \frac{3}{2}kT. \quad (9.4)$$

Этот результат определяет термодинамическую величину с помощью микроскопической характеристики газа. **Абсолютная температура** есть величина, пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул.

Средняя энергия зависит только от температуры и не зависит от массы молекул.

Кроме поступательного движения молекулы возможны ее вращательное движение и колебательные движения составляющих ее атомов. Эти виды движения связаны с некоторым запасом энергии. Ее величина определяется из закона распределения энергии по степеням свободы молекулы.

**Число степеней свободы механической системы** называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы.

Положение материальной точки определяется заданием трех координат (рис. 9.4).

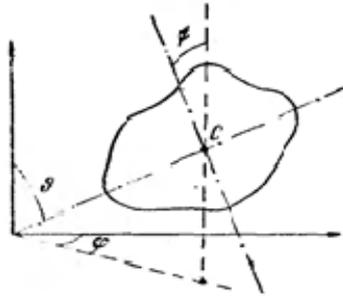


Рис. 9.4

Абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Три поступательные для центра масс и три вращательные относительно трех осей.

Если две точки жестко не связаны, то система имеет три поступательные, две вращательные и одну колебательную степень свободы.

Сколько бы степеней свободы имела молекула, три из них всегда поступательные степени свободы. Так как ни одна из поступательных степеней свободы молекулы не имеет преимущества перед остальными, то на каждую из них должна приходиться в среднем одинаковая энергия, равная одной трети  $\langle \varepsilon_n \rangle$ .

**Закон равнораспределения:** на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ .

Согласно этому закону среднее значение энергии тем больше, чем сложнее молекула, чем больше у нее степеней свободы. Колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергетической емкостью, по сравнению с поступательной или вращательной степенями свободы. Колебательное движение связано не только с кинетической, но и с потенциальной энергией, средние значения которых равны.

#### Средняя полная энергия молекулы

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (9.5)$$

где  $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}$  – число степеней свободы молекулы.

Молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой, поэтому внутреннюю энергию моля идеального газа можно найти, умножив число Авогадро на среднюю энергию одной молекулы (9.5):

$$U_m = N_A \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} N_A k T = \frac{i}{2} R T \quad (9.6)$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры  $U \sim T$ .

**Теплоемкостью тела** называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин:

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}.$$

Теплоемкость моля называется молярной теплоемкостью  $C$  (Дж/моль · К).

Теплоемкость единицы массы вещества называется удельной теплоемкостью  $c$  (Дж/кг · К).

Связь между удельной теплоемкостью  $c$  и молярной теплоемкостью  $C$  газа с молярной массой  $M$  определяется равенствами

$$c = C/M, \quad C = cM.$$

***Теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$   
и при постоянном давлении  $C_p$***

Если нагревание происходит при постоянном объеме, то тело не совершает работы над внешними силами и все тепло идет на приращение внутренней энергии  $dQ_V = dU$ .

Для идеального газа  $C_V = \frac{dU_m}{dT}$ . Получаем  $U_m = C_V T = \frac{i}{2} R T$ .

Следовательно, теплоемкость идеального газа при постоянном объеме определяется равенством

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

При нагревании газа при постоянном давлении газ будет расширяться, совершая работу над внешними силами

$$dQ_p = dU_m + pdV. \quad (9.7)$$

Разделив на  $dT$ , получим

$$\frac{dQ_p}{dT} = C_p = \frac{dU_m}{dT} + p \left( \frac{\partial V_m}{\partial T} \right)_p. \quad (9.8)$$

Используем уравнение состояния  $V_m = RT/p$ , получим **уравнение Майера**

$$C_p - C_v = R, \quad (9.10)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (9.11)$$

Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме  $c_v$  и постоянном давлении  $c_p$

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}. \quad (9.12)$$

Внутренняя энергия массы идеального газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} C_v T. \quad (9.13)$$

## Лекция 10. Статистическое описание параметров системы

### Распределение Максвелла

В равновесном состоянии число молекул газа  $dN_v$ , величина скоростей которых лежит в интервале от  $v$  до  $v + dv$  определяется выражением:

$$dN_v = Nf(v)4\pi v^2 dv. \quad (10.1)$$

Оно позволяет определить функцию распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$F(v) = f(v)4\pi v^2. \quad (10.2)$$

Ее вид был определен Максвеллом (рис. 10.1). **Закон распределения молекул газа по скоростям:**

$$F(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right), \quad (10.3)$$

где  $m$  – масса молекулы,  $T$  – температура газа,  $v$  – скорость данной молекулы.

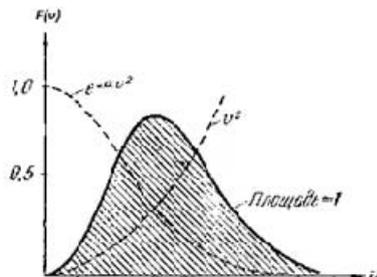


Рис. 10.1

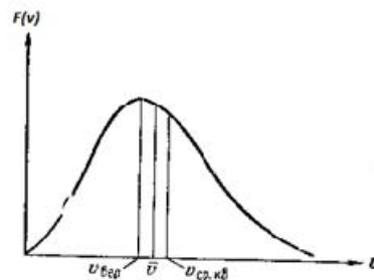


Рис. 10.2

Средняя скорость молекул  $\langle v \rangle$  находится путем интегрирования функции распределения (10.3)

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (10.4)$$

Аналогично определяется средняя квадратичная скорость молекул

$$v_{cp.kв.} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 F(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (10.5)$$

Скорость, отвечающая максимуму функции  $F(v)$ , будет наиболее вероятной (рис. 10.2):

$$v_е = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (10.6)$$

Сопоставление выражений для скоростей позволяет найти соотношение между их величинами:  $v_е : \langle v \rangle : v_{cp.kв.} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3}$ . Подставив выражение для наиболее вероятной скорости в функцию распределения, получим

$$F(v_е) \sim \sqrt{m/T}. \quad (10.7)$$

Отсюда следует, что при увеличении температуры или уменьшении массы молекул максимум кривой смещается вправо и становится ниже (рис. 10.3). При этом площадь кривой остается неизменной.

Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла проведена на **опыте Штерна**. С помощью этого опыта была определена средняя скорость молекул, что явилось экспериментальной проверкой закона распределения Максвелла. Были использованы два коаксиальных цилиндра, а по оси была натянута платиновая нить, покрытая серебром (рис. 10.4). Внутренний цилиндр имел узкую продольную щель. При нагреве нити испаряющиеся атомы серебра двигались в радиальном направлении и образовывали на поверхности внешнего цилиндра узкую вертикальную полоску. При вращении цилиндров этот след смещался на величину

$\Delta s = \omega R \Delta t$ . Время пролета  $\Delta t$  радиуса цилиндра  $R$  определяется скоростью молекул  $\Delta t = R/v$ . Измерив  $\Delta s$ , можно определить скорость по формуле

$$v = \omega R^2 / \Delta s.$$

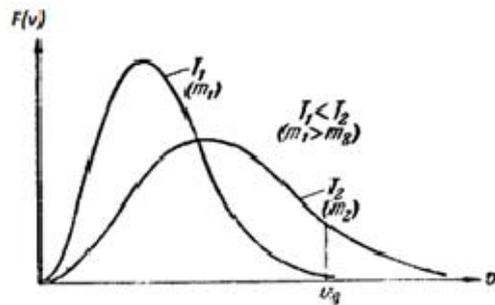


Рис. 10.3

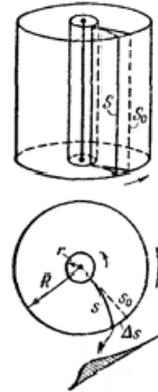


Рис. 10.4

Исследуя профиль следа, можно составить представление о распределении атомов серебра по скоростям. Результаты опыта Штерна подтвердили правильность теоретически полученного распределения Максвелла.

### Распределение Больцмана

Атмосферное давление  $p$  на высоте  $h$  обусловлено весом вышележащих слоев газа. На высоте  $h + dh$  давление равно  $p + dp$ . Разность давлений равно весу газа, заключенного в объеме цилиндра единичного основания и высоты  $dh$  (рис. 10.5).

$$p - (p + dp) = \rho g dh, \quad (10.8)$$

где  $\rho$  – плотность газа на высоте  $h$ .

Следовательно:

$$dp = -\rho g dh. \quad (10.9)$$

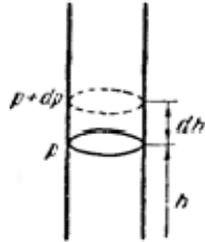


Рис. 10.5

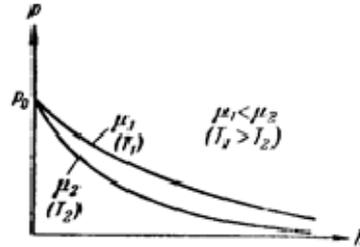


Рис. 10.6

Полагая воздух идеальным газом  $p = \frac{\rho}{M} RT$ , получим

$$dp = -\frac{Mpg}{RT} dh, \quad (10.10)$$

где  $M = m_e N_A$  – средняя молярная масса воздуха,  $m_e$  – средняя масса молекулы воздуха. Имеем

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh = -\frac{m_e N_A g}{RT} dh = -\frac{m_e g}{kT} dh. \quad (10.11)$$

Решая это уравнение при постоянной температуре, получаем барометрическую формулу, которая дает зависимость давления от высоты над поверхностью Земли для изотермической атмосферы (рис. 10.6).

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_e gh}{kT}\right). \quad (10.12)$$

Заменим  $p = nkT$ , получим

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_e gh}{kT}\right). \quad (10.13)$$

При низких температурах концентрация молекул быстро меняется с высотой, а при высоких температурах концентрация меняется медленно. Распределение устанавливается в

результате действия двух противоположных тенденций – притяжения Земли и теплового движения молекул. Распределение молекул по высоте является их распределением по значениям потенциальной энергии молекул  $\varepsilon_p = mgh$ :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right). \quad (10.14)$$

Это распределение справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения. **Распределение Больцмана** верно для молекул в любом потенциальном поле сил, находящихся в состоянии теплового движения. Это распределение позволило определить число Авогадро на опыте Перрена. Он измерял высотное распределение концентрации шариков эмульсии в растворе. Была определена постоянная Больцмана  $k$ , и, зная газовую постоянную, найдено число Авогадро.

### Энтропия

**Макросостояние** – состояние макроскопического тела, которое может быть задано с помощью объема, давления, температуры, внутренней энергии и других макроскопических характеристик.

**Микросостояние** – состояние всех образующих тело молекул, определяющих состояние макроскопического тела.

Число различных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, называется **статистическим весом** или **термодинамической вероятностью**  $\Omega$  макросостояния.

Все микросостояния данной системы равновероятны. Утверждение о равной вероятности всех микросостояний лежит в основе статистической физики и носит название **эргодической гипотезы**.

Вероятность макросостояния пропорциональна его статистическому весу  $\Omega$ , т.е. числу микроскопических способов, которым может быть осуществлено данное макросостояние.

Статистический вес не может быть характеристикой вероятности состояния, так как эта величина неаддитивная. Если представить систему в виде двух невзаимодействующих подсистем со статистическими весами  $\Omega_1, \Omega_2$ , то статистический вес системы равен  $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ . Взяв логарифм, получим  $\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2$ . В качестве характеристики вероятности состояния принимается величина  $S$ , пропорциональная логарифму статистического веса.

Переход системы из состояния 1 в состояние 2 может быть осуществлен обратимым (равновесным) способом (рис. 10.7, сплошная линия) или необратимым (неравновесным) способом (рис. 10.7, штриховая линия).

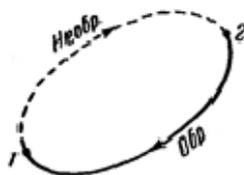


Рис. 10.7

**Энтропией системы** называется величина  $S = k \ln \Omega$ .

**Свойства энтропии:**

1. Энтропия изолированной системы при протекании необратимого процесса возрастает. Изолированная система, предоставленная самой себе, переходит из менее вероятных в более вероятное состояние.

2. Энтропия системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна.

Эти утверждения не являются абсолютно строгими. Энтропия системы в равновесном состоянии претерпевает незначительные кратковременные отрицательные флуктуации.

При протекании в изолированной системе необратимого процесса энтропия возрастает  $dS > 0$ .

Для обратимого процесса передачи телу тепла энтропия дается равенством  $dS = \frac{dQ}{T}$ .

Сообщение системе тепла приводит к усилению теплового движения молекул и, следовательно, к увеличению степени беспорядка в системе. Чем выше температура, чем больше внутренняя энергия системы, тем относительно меньше оказывается доля беспорядка, обусловленного сообщением данного количества тепла  $dQ$ .

Если количество тепла  $dQ$  сообщается системе в ходе необратимого процесса, энтропия возрастает как вследствие сообщения тепла, так и вследствие необратимости процесса  $dS > \frac{dQ}{T}$ .

## Лекция 11. Законы термодинамики

Основу термодинамики образуют ее два начала. Первое начало устанавливает количественные соотношения, имеющие место при превращениях энергии из одних видов в другие. Второе начало определяет условия, при которых возможны эти превращения. Другими словами, определяет возможные направления процессов.

Совокупность микроскопических процессов, приводящих к передаче энергии от тела к телу, называется теплопередачей. Количество энергии, переданное от тела к телу путем теплопередачи, определяется количеством тепла  $Q$ .

**Первое начало термодинамики.** Количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами:

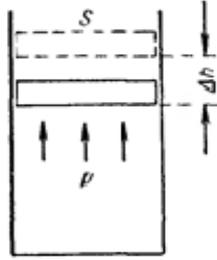


Рис. 11.1

$$Q = U_2 - U_1 + A.$$

Работа, совершаемая телом при изменении объема (рис. 11.1):

$$\Delta A' = F \Delta h = p S \Delta h = p \Delta V.$$

Площадь, ограниченная осью  $V$ , кривой  $p = f(V)$  и прямыми  $V_1, V_2$ , численно равна работе, совершаемой при изменении объема:

$$dQ = dU + p dV.$$

**Адиабатическим** называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой. Воспользуемся выражением для внутренней энергии идеального газа и запишем первое начало термодинамики

$$dQ = \frac{m}{M} C_v dT + p dV. \quad (11.1)$$

Так как для адиабатического процесса  $dQ = 0$ , получим

$$\frac{m}{M} C_V dT + p dV = 0. \quad (11.2)$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа  $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$ , получим

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0. \quad (11.3)$$

Определим постоянную  $\gamma = C_p/C_V$  и заменим  $R/C_V = (\gamma - 1)$ . Из выражения  $\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}$  получим уравнение адиабаты идеального газа в переменных  $T, V$ :

$$TV^{(\gamma-1)} = \text{const}. \quad (11.4)$$

Уравнения Пуассона, связывающие параметры идеального газа при адиабатном процессе:

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (11.5)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

**Другая формулировка первого начала термодинамики:** невозможен перпетуум мобиле (вечный двигатель) первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

Работа, совершаемая газом при его расширении:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \text{ — в общем случае;}$$

$$A = p(V_2 - V_1) \text{ — при изобарном процессе;}$$

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ — при изотермическом процессе;}$$

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T, \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] -$$

при адиабатном процессе,

где  $\gamma = c_p / c_v$  – показатель адиабаты.

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла, называется **тепловой машиной**. Не все получаемое извне тепло  $Q_1$  используется для получения полезной работы (рис. 11.2). Чем полнее тепловая машина получаемое извне тепло  $Q_1$  превращает в работу  $A$ , тем эта машина выгоднее. Тепловую машину принято характеризовать **коэффициентом полезного действия**  $\eta$  (КПД), который определяется как отношение совершаемой за цикл работы к получаемому за цикл теплу

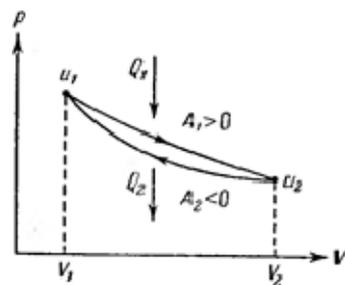


Рис. 11.2

Можно записать термический КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где  $Q_1$  – теплота, полученная рабочим телом от теплоотдача;  $Q_2$  – теплота, переданная рабочим телом теплоприемнику. Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

Второе начало термодинамики, как и первое ее начало, может быть сформулировано несколькими способами.

**Второе начало термодинамики. Формулировка Клаузиуса:** невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому.

В холодильной машине совершается переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому телу. Однако этот переход не является единственным результатом процесса. Он сопровождается изменениями в окружающих телах, связанными с совершением над системой работы.

**Второе начало термодинамики.** Энтропия изолированной системы не может убывать:  $dS \geq 0$ .

Термодинамическое определение энтропии:

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (11.6)$$

Где  $dQ$  – обмен тепла между системой и внешней средой в каком-нибудь из элементарных обратимых циклов, составляющих круговой процесс.

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (11.7)$$

В изолированной системе, предоставленной самой себе,  $\Delta S = S_2 - S_1 > 0$ . Состояние равновесия характеризуется максимальной энтропией  $dS = 0$ .

Основное уравнение термодинамики:

$$TdS = dU + pdV.$$

**Второе начало термодинамики. Формулировка Кельвина:** невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества тепла и превращение этого тепла полностью в работу.

В тепловой машине превращение тепла в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом – передачей некоторого количества тепла  $Q_2$  более холодному телу, вследствие чего получаемое от более нагретого тела количество тепла  $Q_1$  не может быть превращено полностью в работу.

**Второе начало термодинамики:** невозможен перпетуум мобиле второго рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который получал бы тепло от одного резервуара и превращал это тепло полностью в работу.

### Цикл Карно

Для работы теплового двигателя необходимо наличие двух тепловых резервуаров. Нагреватель  $T_1$  и холодильник  $T_2$ . Двигатель в ходе цикла получает количество тепла  $Q_1$  и отдает холодильнику количество тепла  $Q_2$  (рис. 11.3).

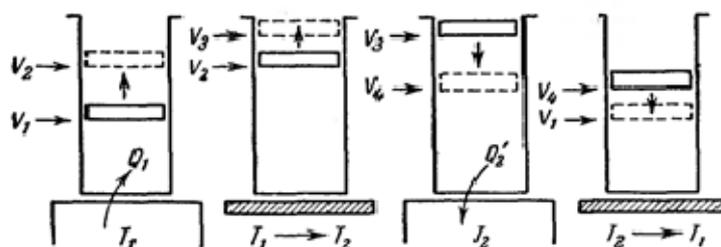


Рис. 11.3

Единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура которого остается неизменной, является изотермический процесс. Процессом, который не сопровождается теплообменом с внешней средой, является адиабатический процесс. Обратимый цикл, совершаемый телом, вступающим в теплообмен с двумя тепловыми резервуарами бесконечно большой емкости, может состоять только из двух изотерм и двух адиабат (рис. 11.4). Такой цикл называется **циклом Карно**.

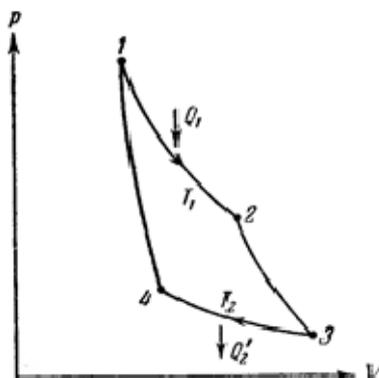


Рис. 11.4

**Теорема Карно.** Коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т.е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где  $T_1, T_2$  – термодинамические температуры теплоотдатчика и теплоприемника.

**Третье начало термодинамики (теорема Нернста).** Энтропия всякого тела стремится к нулю при стремлении к нулю температуры:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

При абсолютном нуле всякое тело находится в основном состоянии, статистический вес которого равен единице  $\Omega = 1$ . В этом случае энтропия равна нулю.

## Лекция 12. Физическая кинетика

Статистическая физика имеет дело с равновесными состояниями и с обратимыми процессами.

**Физическая кинетика** – наука, изучающая процессы, возникающие при нарушениях равновесия. При нарушении равновесия система стремится вернуться в равновесное состояние. Этот процесс сопровождается возрастанием энтропии и, следовательно, необратим. Процессы, изучаемые физической кинетикой, являются необратимыми. Нарушение равновесия сопровождается возникновением потоков, поэтому процессы называются явлениями переноса.

### *Диффузия, теплопроводность и вязкость*

Количество какой-либо величины, проходящее в единицу времени через некоторую поверхность, называется **потоком этой величины**.

**Диффузией** называется обусловленное тепловым движением молекул самопроизвольное выравнивание концентраций в смеси нескольких различных веществ.

Поток молекул через поверхность  $S$  (рис. 12.1) определяется выражением  $N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S$ , где  $D$  – коэффициент диффузии. Размерность  $D$  будет  $L^2/T$ . Для потока массы  $M_i = m_i N_i$  имеем равенство  $M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S$ , называемое **закон Фика**.

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом.

**Эффективным диаметром молекулы**  $d$  называется минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул (рис. 12.2).

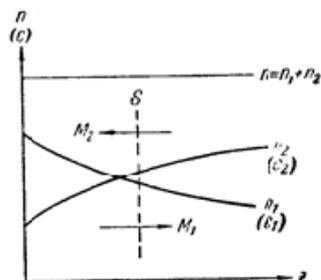


Рис. 12.1

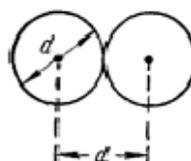


Рис. 12.2

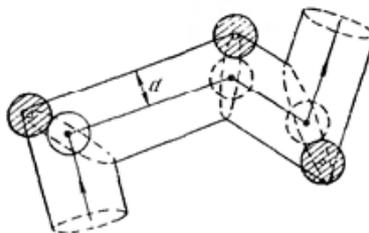


Рис. 12.3

**Эффективным сечением молекулы** называется величина  $\sigma = \pi d^2$ .

За секунду молекула проходит путь, равный средней скорости  $\langle v \rangle$ . Если за секунду она претерпевает в среднем  $\nu$  столкновений (рис. 12.3), средняя **длина свободного пробега** будет равна  $\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\nu}$ . Число столкновений равно  $\nu = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n$ . Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}.$$

Оценка длины свободного пробега:  $d = 2 \times 10^{-10}$  м,  $n = 3 \times 10^{25}$  м<sup>-3</sup>, получим  $\lambda = 2 \times 10^{-7}$  м.

Из молекулярно-кинетической теории следует, что  $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda$ .

**Теплопроводность.** Пусть в газе поддерживается каким либо образом градиент температуры (рис. 12.4). Поток тепла  $q = -\kappa \frac{dT}{dz} S$ . Это эмпирическое уравнение теплопроводности или закон Фурье.

Коэффициент теплопроводности  $\kappa$ , размерность Вт/м · К, поток тепла – Дж/с или Вт.

$$\text{Для газа } \kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_v$$

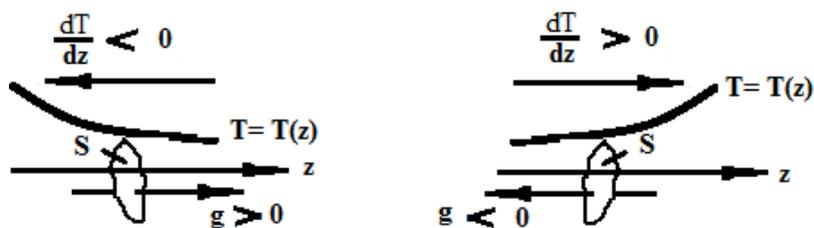


Рис. 12.4

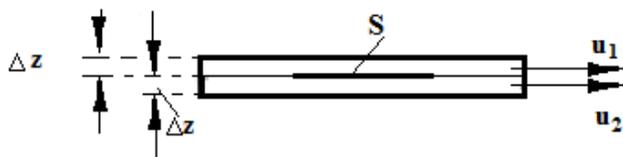


Рис. 12.5

**Вязкость или внутреннее трение.** Сила трения между двумя слоями жидкости или газа (рис. 12.5) равна

$F = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкости. Это эмпирическое уравнение вязкости.

$K$  – импульс, передаваемый за секунду от слоя к слою через поверхность  $S$ , т.е. поток импульса через площадь  $S$ . Уравнение можно представить в виде

$$K = -\eta \frac{du}{dz} S.$$

Поток импульса измеряется в  $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ . Коэффициент вязкости имеет размерность  $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$ .

Для газов имеем  $\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho$ .

### Основные законы

**Закон Авогадро.** Моли всех газов занимают при одинаковых условиях одинаковый объем.

**Объединенный газовый закон.** Произведение давления идеального газа на его молярный объем пропорционально температуре газа. Коэффициент пропорциональности называется универсальной газовой постоянной.

**Газовые законы, являющиеся частными случаями:**

**а) закон Бойля–Мариотта (изотермический процесс:  $T = \text{const}, m = \text{const}$ ):**

$$pV = \text{const},$$

**б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс:  $p = \text{const}, m = \text{const}$ ):**

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

**в) закон Шарля (изохорный процесс:  $V = \text{const}, m = \text{const}$ ):**

$$\frac{p}{T} = \text{const}.$$

**Закон Дальтона.** Давление смеси газов равно сумме парциальных давлений составляющих ее газов.

**Основное уравнение кинетической теории газов**

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_n \rangle.$$

**Закон равнораспределения.** На каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ .

**Распределение Максвелла молекул газа по скоростям:** функция распределения молекул газа по скоростям в

равновесном состоянии определяется формулой

$$F(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

**Распределение Больцмана** молекул по энергиям в потенциальном поле сил:  $n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right)$ .

**Эргодическая гипотеза.** Все микросостояния системы, характеризующейся макросостоянием, равновероятны.

**Первое начало термодинамики:**

Количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.

Невозможен перпетуум мобиле (вечный двигатель) первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

**Второе начало термодинамики:**

Формулировка Клаузиуса: невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому.

Формулировка Кельвина: невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества тепла и превращение этого тепла полностью в работу.

Невозможен перпетуум мобиле второго рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который получал бы тепло от одного резервуара и превращал это тепло полностью в работу.

Энтропия изолированной системы не может убывать:  $dS \geq 0$ .

**Третье начало термодинамики (теорема Нернста).**

*Энтропия всякого тела стремится к нулю при стремлении к нулю температуры.*

**Теорема Карно.** *Коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т.е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника.*

**Закон Фика.** *Поток массы газа пропорционален градиенту его плотности и направлен в сторону ее уменьшения.*

**Закон Фурье.** *Поток тепла в газе пропорционален градиенту его температуры и направлен в сторону ее уменьшения.*

### Задачи

1. Газ имеет плотность  $0,4 \text{ кг/м}^3$  при давлении  $35 \text{ кПа}$ . Определить наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорость молекул газа.

2. Определить количество теплоты, которое было сообщено двухатомному газу при его изобарическом расширении, если при этом газом была совершена работа  $180 \text{ Дж}$ .

3. Объем двухатомного газа уменьшается в 3 раза при его адиабатическом сжатии. Изначально газ находился при температуре  $25^\circ\text{C}$  и давлении  $3 \text{ МПа}$ . Определить давление и температуру газа после сжатия.

4. Определить молярную массу двухатомного газа, если известно, что его удельная теплоемкость при постоянном давлении равна  $14,7 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}$ .

5. В идеальной тепловой машине из каждых 2 Дж теплоты, получаемой от нагревателя,  $1,5 \text{ Дж}$  отдается холодильнику. Температура холодильника  $30^\circ\text{C}$ . Определить температуру нагревателя.

6. Остается ли постоянной энтропия изолированной термодинамической системы в процессе кристаллизации?

7. Определить работу, совершаемую за один цикл идеальной тепловой машиной, работающей по циклу Карно. Температура холодильника  $300 \text{ K}$ , температура нагревателя  $500 \text{ K}$ . За цикл машина получает от нагревателя  $3 \text{ кДж}$ .

8. Определить количество теплоты, которое необходимо сообщить  $20 \text{ г}$  кислорода, чтобы повысить его температуру на  $100^\circ\text{C}$  при постоянном давлении.

9. Определить изменение энтропии при превращении  $20 \text{ г}$  льда, находящегося при температуре  $t = -30^\circ\text{C}$ , в пар при  $t_n = 100^\circ\text{C}$ .

10. Чему равно число вращательных степеней свободы у молекулы кислорода?

11. В изобарном процессе идеальному к одноатомному газу подведено количество теплоты  $Q$ . Определить, какой процент подводимого количества теплоты расходуется на увеличение внутренней энергии.

12. Какое максимальное значение КПД может иметь тепловой двигатель с температурой нагревателя  $350\text{ }^\circ\text{C}$  и температурой холодильника  $30\text{ }^\circ\text{C}$ ?

13. Два моля одноатомного идеального газа в ходе некоторого процесса получили  $3000\text{ Дж}$  теплоты. При этом его температура понизилась на  $100\text{ К}$ . Определить работу, совершенную газом.

14. Объем газа при давлении  $3\text{ МПа}$  равен  $2\text{ л}$ . Чему равна кинетическая энергия поступательного движения всех его молекул?

15. Трём молям кислорода сообщили  $400\text{ Дж}$  теплоты при постоянном давлении. На сколько градусов повысилась температура газа? Считать связь атомов в молекуле жесткой.

16. КПД цикла Карно равен  $70\%$ . Во сколько раз температура нагревателя больше температуры холодильника?

17. Чему равна кинетическая энергия молекул водорода при температуре  $250\text{ К}$ , если не учитывать их колебательное движение? Масса газа равна  $6\text{ г}$ .

18. Груз, подвешенный к стальной проволоке диаметром  $2\text{ мм}$ , вызвал такое же удлинение проволоки, как и при ее нагревании на  $25\text{ }^\circ\text{C}$ . Определить массу груза.

19. Определить длину подвешенной вертикально медной проволоки, при которой она обрывается под действием собственной силы тяжести.

20. Через единицу поверхности стены за  $1\text{ час}$  проходит количество теплоты, равное  $500\text{ кДж}$ . Толщина стены равна  $30\text{ см}$ . Наружная стена имеет температуру  $-30\text{ }^\circ\text{C}$ , а внутренняя –  $+20\text{ }^\circ\text{C}$ . Определить коэффициент теплопроводности материала стены.

21. Сферическую каплю ртути диаметром  $8 \text{ мм}$  делят на две равные капли. Какую работу требуется при этом совершить против сил поверхностного натяжения?

22. При условии, что в молекуле идеального газа имеет место поступательное, вращательное и колебательное движение, определить отношение средней кинетической энергии колебательного движения к полной кинетической энергии молекулы азота.

---

**РАЗДЕЛ 3**  
**ПОКОЯЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ**

---

**Лекция 13. Электрическое поле в вакууме**

Все тела в природе способны приобретать электрический заряд. Имеются два вида электрических зарядов. Их наличие проявляется во взаимодействии тел. Величина заряда не зависит от того, движется он или покоится. Элементарный электрический заряд  $e$ . Заряд  $q = Ne$ .

**Закон сохранения электрического заряда** – суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться.

**Закон Кулона для точечных зарядов** – сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Экспериментальная проверка закона Кулона была проведена с помощью крутильных весов (рис. 13.1). Сила взаимодействия направлена вдоль прямой, соединяющей заряды (рис. 13.2):

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}; \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ai}.$$

Система СГСЭ:  $k = 1$ ,  $e = 4,8 \times 10^{-10}$  СГСЭ-ед. заряда

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Система СИ: заряд 1 Кл =  $3 \times 10^9$  СГСЭ-ед. заряда,

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл. } F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}.$$

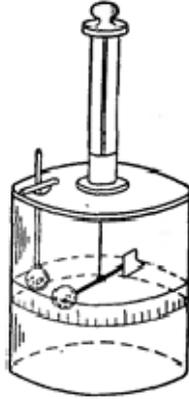


Рис. 13.1

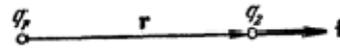


Рис. 13.2

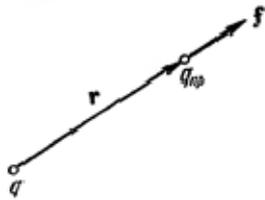


Рис. 13.3

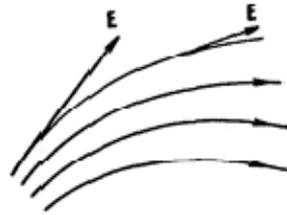


Рис. 13.4

Для исследования электрического поля используют точечный пробный заряд (рис. 13.3).

Электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 0,885 \times 10^{-11} \text{ Ф/м.}$$

Заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем **электрическое поле**, вектор напряженности которого равен  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ . Напряженность электрического поля в данной точке на расстоянии  $r$  от точечного заряда определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_{12}.$$

Заряд величиной в 1 Кл создает в вакууме на расстоянии 1 м поле напряженностью

$$E = \frac{1}{4\pi(1/4\pi \times 9 \times 10^9)1^2} = 9 \times 10^9 \text{ В/м.}$$

Соотношение между единицами напряженности электрического поля в системах единиц:

$$1 \text{ СГСЭ-ед. напряженности поля} = 3 \times 10^4 \text{ В/м.}$$

На заряд  $q$  в электрическом поле действует сила Кулона:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ .

**Принцип суперпозиции** – напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:  $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$ .

Электрическое поле наглядно можно изображать с помощью силовых линий (рис. 13.4). На рис. 13.5 представлена картина силовых линий положительного (слева) и отрицательного точечных зарядов.

Поле центральных сил консервативно  $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$ . Работа при перемещении заряда  $q$  из одной точки в другую не зависит от формы пути

$$A = \int_1^2 F(r) dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right).$$

Работа сил консервативного поля ведет к уменьшению потенциальной энергии  $A_{12} = W_{r_1} - W_{r_2}$ . Потенциальная энергия поля в точке  $r$  (рис. 13.6) равна  $W_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$ . При

стремлении  $r \rightarrow \infty$  потенциальная энергия поля обращается в нуль.

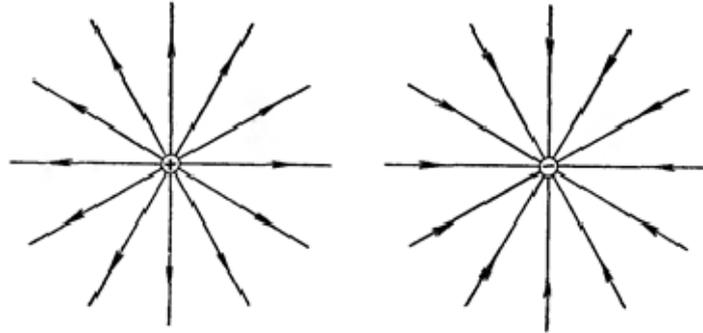


Рис. 13.5

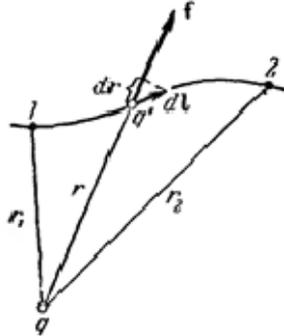


Рис. 13.6

Величина  $\varphi = \frac{W_r}{q}$ , одинаковая для всех пробных зарядов  $q$ , называется **потенциалом электрического поля** в данной точке. Она используется, наряду с напряженностью поля  $\mathbf{E}$ , для описания электрических полей. **Потенциал** численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r}$ . Потенциал по-

ля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциа-

лом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией  $W = q\varphi$ . Работа сил поля над зарядом  $q$  может быть выражена через разность потенциалов  $A_{12} = W_{r_1} - W_{r_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

**Потенциал** численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность  $A_\infty = q\varphi$ . Единица измерения потенциала в системе СИ принята  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл}$ .

Связь между электрическим полем и его потенциалом определяется равенством  $\mathbf{E} = -\nabla \cdot \varphi$ , или

$$\mathbf{E} = -\left( \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Однородное поле, создаваемое бесконечными пластинами, расположенными на расстоянии  $d$  друг от друга:  $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d$ .

Поле с осевой или центральной симметрией:  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ .

### Лекция 14. Свойства электрического поля

Представим поверхность  $S$  в виде суммы элементарных площадок  $dS$  (рис. 14.1). Поток вектора через площадку  $dS$  равен:

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (14.1)$$

где  $d\mathbf{S}$  – вектор, модуль которого равен величине площадки  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали к площадке  $\mathbf{n}$ :

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}. \quad (14.2)$$

Просуммировав потоки вектора через все элементарные площадки, получим поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность  $S$ :

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (14.3)$$

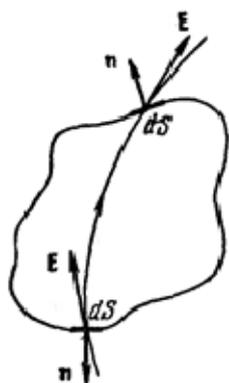


Рис. 14.1

Рассмотрим поток вектора поля точечного заряда через замкнутую поверхность, охватывающую заряд. Радиальная компонента поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  равна

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \text{ В качестве поверхности выберем сферу. Поток}$$

вектора поля точечного заряда через поверхность сферы определяется равенством

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E_r dS = E_r \oint dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Это равенство справедливо для системы  $N$  зарядов  $q = \sum_{i=1}^N q_i$ ,

расположенных внутри сферы.

**Теорема Гаусса.** Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен

алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\varepsilon_0$ :  $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$ .

Рассмотрим замкнутую поверхность, ограничивающую объем  $V$  (рис. 14.2). Отличие потока вектора  $\Phi_E$  через эту поверхность от нуля указывает на то, что внутри объема расположены заряды, которые являются источниками поля. Величина потока определяет суммарную мощность источников. Частное от деления потока на величину объема  $\Phi_E/V$  определяет среднюю удельную мощность источников. При стремлении  $V$  к нулю, т.е. при стягивании объема  $V$  к точке  $P$ , отношение дает истинную удельную мощность источников в этой точке. Такой предел называется **дивергенцией** вектора или расхождением в точке  $P$ . Он обозначается  $\text{div}\mathbf{E}$  или  $(\nabla \cdot \mathbf{E})$ :

$$\text{div}\mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\Phi_E}{V} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

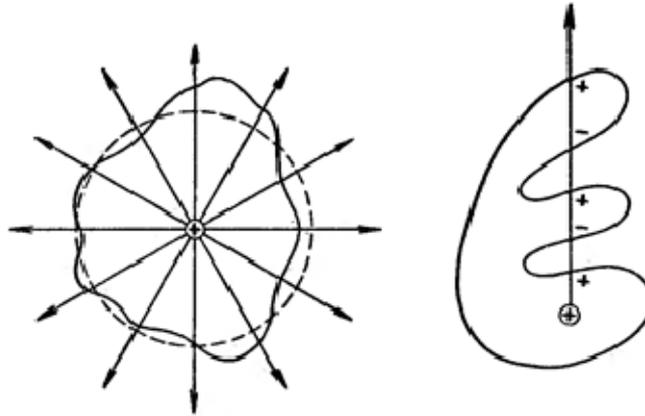


Рис. 14.2

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности  $S$ , окружающей точку  $P$ . Можно показать, что в декартовой системе координат  $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ .

**Теорема Остроградского–Гаусса:** суммарная мощность источников поля равна потоку вектора поля через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{E} \cdot dV.$$

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами, полагают их распределенными непрерывно в пространстве с конечной плотностью. Объемная плотность заряда  $\rho$  определяется как отношение заряда  $dq$  к физически бесконечно малому объему  $dV$ , в котором заключен этот заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (14.4)$$

Суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$  (рис. 14.3), вычисляется интегрированием плотности заряда  $\rho$  по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\sum_{i=1}^N q_i = \int_V \rho dV. \quad (14.5)$$

Следовательно, теорему Гаусса можно представить в виде  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$ . Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, получим

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{E} \cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (14.6)$$

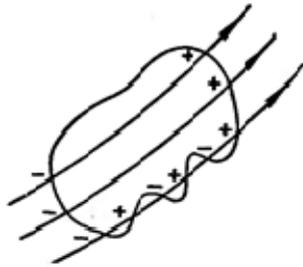


Рис. 14.3

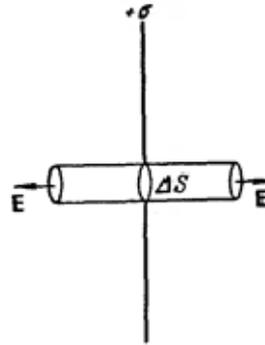


Рис. 14.4

Это равенство должно выполняться для любого произвольно выбранного объема. Следовательно, значения подынтегральных функций в каждой точке пространства одинаковы:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (14.7)$$

Это равенство выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме.

### **Определение электрических полей**

Введем понятия поверхностной и линейной плотности заряда. Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое несущего заряд тела (рис. 14.4), распределение заряда в пространстве можно характеризовать с помощью **поверхностной плотности заряда**

$$\sigma = dq/dS,$$

где  $dq$  – заряд, заключенный в слое бесконечно малого участка поверхности  $dS$ . Если заряд распределен по объему или поверхности цилиндрического тела равномерно в каждом сечении, то определяется **линейная плотность заряда**:

$$\tau = dq/dl,$$

где  $dl$  – длина физически бесконечно малого отрезка цилиндра,  $dq$  – заряд, сосредоточенный на этом отрезке.

Найдем напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами. Пусть заряд равномерно распределен вдоль тонкой нити с линейной плотностью  $\tau$ . На ней выделяется малый участок длиной  $dl$  с зарядом  $dq = \tau dl$ . Такой заряд можно рассматривать как точечный и применять формулы

$$d\mathbf{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $r$  – радиус-вектор, направленный от выделенного элемента  $dl$  к точке, в которой вычисляется напряженность. Используя принцип суперпозиции электрических полей, находим интегрированием напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\varphi$  поля, создаваемого распределенным вдоль нити зарядом:

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl \mathbf{r}}{r^2 r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl}{r}.$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины  $l$  заряженной нити.

Применение теоремы Гаусса для определения напряженности электрического поля.

**Бесконечная однородно заряженная плоскость.** Из симметрии следует, что напряженность электрического поля в любой точке направлена нормально к плоскости (рис. 14.5). Проведем цилиндрическую поверхность с образующими перпендикулярными плоскости. Основания цилиндра расположены симметрично относительно плоскости. Площадь оснований равна  $\Delta S$ . Применим к замкнутой цилиндрической поверхности теорему Гаусса. Поток вектора электрического поля через боковую поверхность будет отсутствовать, так как его касательная компонента в каждой точке равна нулю. Поток вектора  $E$  через оба основания цилиндрической по-

верхности равен  $2E\Delta S$ , а заряд внутри поверхности равен  $\sigma\Delta S$ . Следовательно, согласно теореме Гаусса, получим

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}. \quad (14.8)$$

Из этого равенства следует выражение для напряженности электрического поля заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (14.9)$$



Рис. 14.5

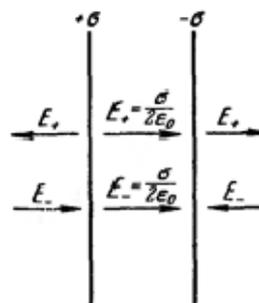


Рис. 14.6

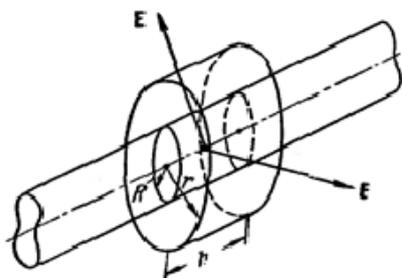


Рис. 14.7

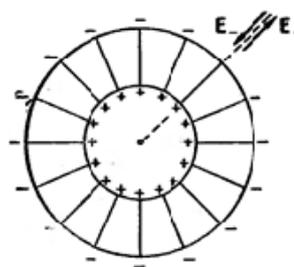


Рис. 14.8

Поле двух параллельных бесконечных плоскостей, заряженных равномерно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью (рис. 14.6), можно определить как суперпозицию полей каждой из них в отдельности.

**Поле заряженного бесконечного цилиндра.** Пусть  $R$  – радиус бесконечного цилиндра, а  $\tau$  – линейная плот-

ность заряда (рис. 14.7). Проведем замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса  $r$  и высоты  $h$ , коаксиальную с цилиндром. Потоки поля через основания цилиндрической поверхности равны нулю, а поток поля  $E(r)$  через боковую поверхность равен  $E(r) \cdot 2\pi r h$ . Если  $r > R$ , то заряд внутри поверхности равен  $q = \tau h$ . Воспользовавшись теоремой Гаусса, получим

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\tau h}{\varepsilon_0}. \quad (14.10)$$

Следовательно, поле заряженного цилиндра при условии  $r > R$  определяется формулой

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (14.11)$$

Если  $r < R$ , то внутри поверхности не содержится зарядов. Поэтому поле равно нулю.

**Поле объемно заряженного шара.** Шар радиуса  $R$  заряжен электрическим зарядом  $q$  с постоянной объемной плотностью  $\rho = 3q/4\pi R^3$ . Вектор напряженности поля направлен по радиусу вектору в системе координат с центром в центре шара (рис. 14.8). Проведем сферическую поверхность радиуса  $r < R$ . Внутри нее заключен заряд, равный  $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ . Теорема Гаусса для такой поверхности имеет вид

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (14.12)$$

Заменив в этой формуле плотность заряда на полный заряд шара, получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r, \quad r \leq R. \quad (14.13)$$

Напряженность поля внутри шара растет линейно с расстоянием от его центра. Если проведем сферическую поверхность с радиусом  $r > R$ , то внутрь ее попадает весь заряд шара  $q$ . Следовательно,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (14.14)$$

Напряженность поля вне шара зависит от расстояния, так же как поле точечного заряда:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (14.15)$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной зарядом  $q$  сферой радиуса  $R$  на расстоянии  $r$  от ее центра:

$$\begin{aligned} \text{а) } E &= 0; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad (r < R); \\ \text{б) } E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad (r = R); \\ \text{в) } E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad (r > R). \end{aligned}$$

Эквипотенциальные поверхности – это поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал. Так как при перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется, то работа электрических сил в этом случае равна нулю, следовательно, вектор напряженности электрического поля в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности. На рис. 14.9 штриховыми линиями представлены эквипотенциальные поверхности для поля точечного положительного заряда (слева) и системы точечных зарядов: положительного и отрицательного.

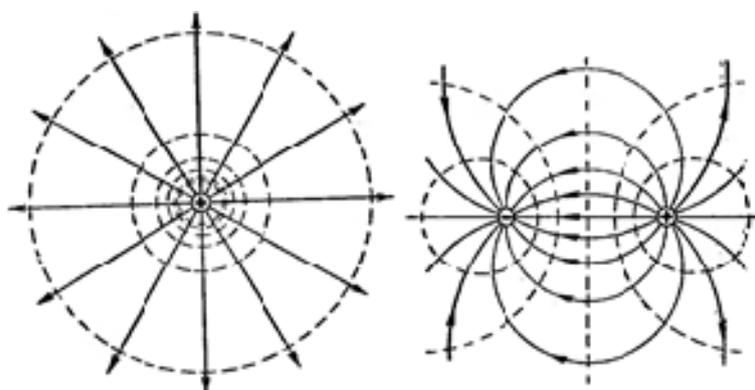


Рис. 14.9

### Лекция. 15. Электрическое поле в диэлектриках и проводниках

**Диэлектриками** называются вещества, неспособные проводить сколько-нибудь значительный электрический ток. Диэлектрик в электрическом поле изменяет это поле и сам претерпевает существенные изменения. Эти изменения связаны со структурой его атомов и молекул. Молекула представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю. Поле такой системы определяется величиной и направлением вектора дипольного электрического момента  $\mathbf{p} = \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle$ , где  $\langle \mathbf{r}_i \rangle$  – средние значения радиусов векторов зарядов  $q_i$ , суммирование ведется по электронам и ядрам атомов. У симметричных молекул дипольный момент равен нулю. Такие молекулы называются **неполярными**. Несимметричные молекулы обладают собственным дипольным моментом. Такие молекулы называются **полярными**. Поведение молекулы во внешнем электрическом поле определяется ее дипольным моментом.

Под действием электрического поля в **неполярной** молекуле положительные заряды смещаются в направлении поля, а отрицательные – в направлении против поля. В результате молекула приобретает дипольный момент. Его величина пропорциональна напряженности поля  $\mathbf{p} = \beta \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , где  $\beta$  – **поляризуемость** молекулы. В процессе поляризации неполярной молекулы положительные и отрицательные ее заряды связаны упругими силами. Молекула в электрическом поле ведет себя как упругий диполь.

**Полярная** молекула под действием электрического поля поворачивается таким образом, чтобы ее дипольный момент ориентировался вдоль поля (рис. 15.1). На его величину внешнее поле практически не влияет. Полярная молекула во внешнем поле ведет себя как жесткий диполь.

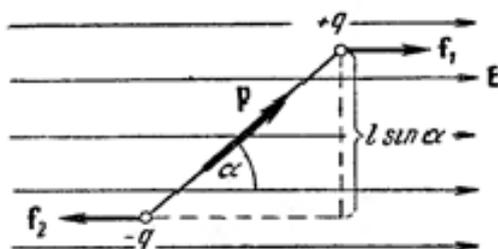


Рис. 15.1

Если внешнее поле отсутствует, то суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю. Внешнее поле **поляризует** диэлектрик. Результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля. Степень поляризации диэлектрика характеризуется дипольным моментом единицы объема. Для определения ее величины в данной точке необходимо выделить физически бесконечно малый объем  $\Delta V$ , содержащий эту точку.

Поляризованностью диэлектрика  $\mathbf{P}$  называется векторная величина, определяемая формулой

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}.$$

У изотропных диэлектриков поляризованность в какой-либо точке определяется напряженностью поля в той же точке соотношением

$$\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

где  $\kappa$  – **диэлектрическая восприимчивость диэлектрика**. Действию внешнего поля на полярные молекулы диэлектрика препятствует тепловое движение молекул. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов молекул в направлении поля.

Заряды, которые входят в состав диэлектрика, называются **связанными**. Они не могут покидать пределы молекулы. Заряды, которые находятся в диэлектрике, но не входят в

состав его молекул, а также заряды, расположенные вне диэлектрика, называются **сторонними**. Поле в диэлектрике является суперпозицией поля сторонних зарядов  $\mathbf{E}_e$  и поля связанных зарядов  $\mathbf{E}_c$ . Результирующее поле  $\mathbf{E}_m$  называется **микроскопическим** полем:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e.$$

Микроскопическое поле сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. В результате движения зарядов оно меняется со временем. В качестве макроскопической характеристики поля  $\mathbf{E}$  используется усредненное по физически бесконечно малому объему микроскопическое поле:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_m \rangle = \langle \mathbf{E}_e \rangle + \langle \mathbf{E}_c \rangle.$$

Усредненное поле сторонних зарядов обозначим через  $\mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E}_e \rangle$ , а усредненное поле связанных зарядов обозначим  $\mathbf{E}' = \langle \mathbf{E}_c \rangle$ . **Макроскопическим полем** называется величина

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

В вакууме, при отсутствии диэлектриков, макроскопическое поле равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E}_e \rangle.$$

Источниками электрического поля в диэлектрике являются как сторонние заряды с плотностью  $\rho$ , так и связанные заряды с плотностью  $\rho'$ . Из теоремы Гаусса в дифференциальной форме получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho'). \quad (15.1)$$

Плотность связанных зарядов определяется величиной электрического поля. Для вычисления полей следует ввести величину, которая определяется только сторонними зарядами  $\rho$ . Плотность связанных зарядов определяется диверген-

цией поляризованности  $\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ . Следовательно:

$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \operatorname{div}\mathbf{P})$ . Из этого равенства следует, что

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (15.2)$$

Электрическим смещением или электрической индукцией называется величина, определяемая соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (15.3)$$

Подставив в это равенство выражение для поляризованности  $\mathbf{P} = \kappa\varepsilon_0\mathbf{E}$ , получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0\kappa\mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \kappa)\mathbf{E}. \quad (15.3)$$

Безразмерная величина  $\varepsilon = 1 + \kappa$  называется **относительной диэлектрической проницаемостью** или просто **диэлектрической проницаемостью** среды. Следовательно, электрическое смещение можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (15.4)$$

Из этого равенства следует, что электрическое смещение пропорционально электрическому полю.

Выше получено, что  $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$  (15.2) и (15.3). Интегрирование этого равенства по произвольному объему дает

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{D}dV = \int_V \rho dV. \quad (15.5)$$

Применяя к левой части равенства теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (15.6)$$

Левая часть равенства представляет собой поток  $\Phi_D$  вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность  $S$ , а правая часть является суммой сторонних зарядов  $\sum q_i$ , заключенных внутри этой поверхности. Следовательно, равенство можно представить в виде

$$\Phi_D = \sum q_i . \quad (15.7)$$

**Теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ .** Поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.

### Проводники в электрическом поле

Заряды в проводнике перемещаются под действием сколь угодно малой силы. Для равновесия зарядов в проводнике должны выполняться следующие условия.

Напряженность поля внутри проводника равна нулю  $\mathbf{E} = 0$ . Это означает, что потенциал внутри проводника постоянен:  $\varphi = const$ .

Вектор напряженности поля направлен по нормали к поверхности проводника  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n$  (рис. 15.2). Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

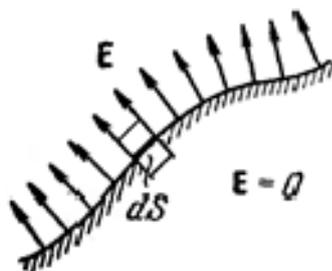


Рис. 15.2

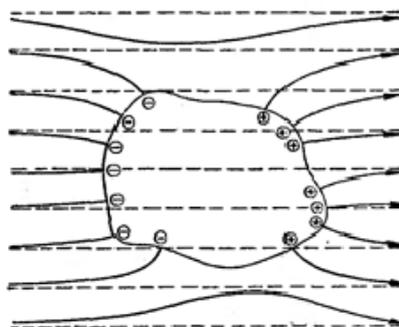


Рис. 15.3

Появление электрического поля приводит к движению зарядов разных знаков в противоположных направлениях

(рис. 15.3). В результате у концов проводника появляются индуцированные заряды разных знаков. Поле этих зарядов направлено в противоположную сторону от внешнего поля и полностью компенсирует его внутри проводника. Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике подобным образом. Отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же. Следовательно, потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:

$$q = C\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между потенциалом и зарядом называется **емкостью** проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

*Емкость численно равна заряду, который повышает его потенциал на единицу.*

#### *Потенциал заряженного шара радиуса $R$*

Между потенциалом и полем существует соотношение  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ . Потенциал шара можно найти, проинтегрировав это равенство от  $R$  до  $\infty$ . Получим

$$\varphi = -\int_R^{\infty} E dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{R}.$$

Емкость уединенного шара радиуса  $R$ , погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

Единица емкости называется **фарадом** (Ф). Это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл.

Устройства, которые накапливают значительный заряд при небольших размерах, называются **конденсаторы**. В их основу положен тот факт, что емкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Основной характеристикой конденсатора является его **емкость, которая пропорциональна заряду и обратно пропорциональна разности потенциалов между его обкладками**:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Разность потенциалов называется напряжением между соответствующими точками  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . Следовательно:

$$C = \frac{q}{U},$$

где  $U$  – напряжение между обкладками конденсатора.

#### *Емкость плоского конденсатора*

Напряженность поля между обкладками равна  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$ . Разность потенциалов между обкладками

равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$ . Следовательно, для емкости

плоского конденсатора получается формула

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где  $S$  – площадь пластины (одной) конденсатора;  $d$  – расстояние между пластинами.

Емкость батареи конденсаторов:

а)  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$  при последовательном соединении;

$$\text{б) } C = \sum_{i=1}^N C_i \text{ при параллельном соединении,}$$

где  $N$  – число конденсаторов в батарее.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2}; \quad W = \frac{CU^2}{2}; \quad W = \frac{q^2}{2C}.$$

#### Генератор Ван-дер-Граафа (рис. 15.4)

Электростатический генератор основан на том, что избыточные электрические заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Полый металлический шар устанавливается на изолирующей колонне. Внутри шара введена надетая на валики бесконечная движущаяся лента из прорезиненной ткани. По мере накопления на шаре зарядов потенциал его растет до тех пор, пока утечка заряда не станет равной подводимому заряду.

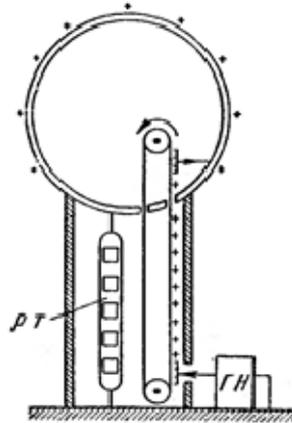


Рис. 15.4

### Основные законы

**Закон сохранения электрического заряда.** Суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться.

**Закон Кулона для точечных зарядов.** Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

**Теорема Гаусса.** Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i.$$

**Теорема Остроградского–Гаусса.** Суммарная мощность источников поля равна потоку вектора поля через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV.$$

**Электрическое смещение, или электрическая индукция, в диэлектрике  $\mathbf{D}$**  пропорционально напряженности электрического поля  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

**Теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ .** Поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.

### Задачи

1. Два точечных заряда  $2q$  и  $3q$  на расстоянии  $2r$  взаимодействуют с силой  $F$ . Во сколько раз изменится по сравнению с  $F$  сила взаимодействия зарядов  $q$  и  $q/2$  на расстоянии  $r$ ?

2. Поверхностная плотность заряда шара радиусом  $10\text{ см}$  равна  $1 \cdot 10^{-4}\text{ Кл/м}^2$ . Определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда  $2\text{ нКл}$  из точки, находящейся на расстоянии  $0,5\text{ см}$  от поверхности шара, в бесконечность.

3. На каком расстоянии в масле (относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 5$ ) два точечных заряда взаимодействуют с такой же силой, с какой они взаимодействуют в воздухе ( $\varepsilon = 1$ ) на расстоянии  $10\text{ см}$ .

4. Во сколько раз энергия гравитационного взаимодействия двух электронов меньше энергии их электростатического взаимодействия?

5. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между двумя точечными зарядами:  $-10\text{ нКл}$  и  $+5\text{ нКл}$ . Заряды находятся в воздухе на расстоянии  $8\text{ см}$ .

6. Определить напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии  $6\text{ см}$  от отрицательного заряда  $-30\text{ нКл}$  и в  $8\text{ см}$  от положительного заряда  $+15\text{ нКл}$ . Расстояние между зарядами равно  $10\text{ см}$ .

7. В плоском конденсаторе, расположенном горизонтально, находится в равновесии заряженная капелька ртути. Напряженность электрического поля равна  $100\text{ кВ/м}$ . Заряд капли равен  $1 \cdot 10^{-18}\text{ Кл}$ . Определить радиус капли.

8. Определить напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии  $10\text{ см}$  от центра (по оси) тонкого металлического кольца радиусом  $20\text{ см}$ . Заряд кольца равен  $10\text{ нКл}$ .

9. Два проводника заряжены до потенциалов  $10\text{ В}$  и  $-20\text{ В}$ . Какую работу совершают силы поля при переносе заряда  $150\text{ нКл}$  с первого проводника на второй?

10. Определить скорость электрона, который приблизится к бесконечной положительно заряженной нити с линейной плотностью заряда  $0,4\text{ мКл/м}$ . Начальное расстояние электрона от нити равно  $2\text{ см}$ , конечное равно  $1\text{ см}$ .

11. Протон влетает в горизонтально расположенный плоский конденсатор параллельно пластинам на расстоянии  $1\text{ см}$  от каждой пластины. Длина конденсатора  $8\text{ см}$ , разность потенциалов между пластинами конденсатора равна  $500\text{ В}$ . При какой предельной начальной скорости протона он не вылетит из конденсатора?

12. Определить массу всех электронов, которые были сообщены шарик радиусом  $1\text{ см}$ , если потенциал шарика стал равен  $3\text{ кВ}$ .

13. Найти емкость плоского воздушного конденсатора. Площадь пластин равна  $1,5\text{ м}^2$ , расстояние между ними  $1\text{ мм}$ .

14. Определить емкость одного метра коаксиального кабеля. Радиус центральной жилы равен  $1\text{ см}$ , радиус оболочки  $4\text{ см}$ . Относительная диэлектрическая проницаемость изолятора между электродами равна  $4$ .

15. Разность потенциалов на зажимах батареи из двух последовательно соединенных конденсаторов равна  $10\text{ В}$ . Емкость первого конденсатора равна  $3\text{ мкФ}$ , второго –  $5\text{ мкФ}$ . Определить заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора.

---

**РАЗДЕЛ 4**  
**РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ**  
**ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ**

---

**Лекция 16. Постоянный электрический ток**

Электрическим током через поверхность называется перенос отличного от нуля суммарного заряда через эту поверхность. Для этого внутри тела необходимо наличие заряженных частиц, носителей тока и электрического поля. При включении поля на хаотическое движение носителей со скоростью  $\mathbf{v}$  накладывается их упорядоченное движение со скоростью  $\mathbf{u}$ . Так как средняя скорость хаотического движения равна нулю, то средняя скорость носителей равна

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle.$$

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока. **Сила тока** – величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Если за время  $dt$  через поверхность переносится заряд  $dq$ , то сила тока равна

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Если ток создается носителями обоих знаков, то положительные носители переносят заряд в положительном направлении, а отрицательные носители – в обратном:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}.$$

Электрический ток может быть распределен по поверхности, которую он пересекает. В этом случае он характеризуется **вектором плотности тока**. Его модуль равен отношению силы тока к площадке, перпендикулярной к направлению движения носителей:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Направление плотности тока совпадает с направлением вектора скорости положительно заряженных носителей заряда  $\mathbf{u}^+$ . Зная вектор плотности тока в каждой точке пространства, можно найти силу тока через любую поверхность  $S$ :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Обозначим  $n^+, n^-$  – концентрация положительно и отрицательно заряженных носителей,  $e^+, e^-$  – алгебраическая величина их зарядов,  $u^+, u^-$  – средние скорости носителей, которые они приобретают под действием поля. За единицу времени единичную площадку пересечет  $n^+u^+$  положительно заряженных носителей, которые перенесут заряд  $e^+n^+u^+$ . Отрицательно заряженные носители перенесут в противоположную сторону заряд  $e^-n^-u^-$ . Следовательно, получаем выражение для плотности тока:

$$j = e^+n^+u^+ + |e^-|n^-u^-.$$

Произведение  $e^+n^+$  определяет плотность положительного заряда носителей  $\rho^+$ . Аналогично, определяя плотность отрицательных зарядов носителей, в векторном виде получим

$$\mathbf{j} = \rho^+\mathbf{u}^+ + \rho^-\mathbf{u}^-.$$

### ***Уравнение непрерывности***

Если в среде с электрическим током расположена замкнутая поверхность  $S$ , то выражение  $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  определяет заряд, выходящий в единицу времени из объема  $V$ , ограни-

ченного поверхностью  $S$ . Эта величина равна скорости убывания заряда  $q$  в этом объеме:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (16.1)$$

Воспользовавшись выражением для плотности заряда в объеме, получим

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (16.2)$$

Преобразуем левую часть равенства по теореме Остроградского – Гаусса. В результате получим

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (16.3)$$

Это равенство выполняется, если в каждой точке пространства выполняется условие

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (16.4)$$

Это равенство называется **уравнением непрерывности**. Оно выражает закон сохранения заряда. В случае постоянного тока уравнение имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (16.5)$$

Вектор плотности тока не имеет источников. Линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Они всегда замкнуты.

### *Электродвижущая сила*

Если в проводнике создать электрическое поле и его не поддерживать, то движение зарядов быстро приведет к его исчезновению. Чтобы поддерживать электрический ток, необходимо перемещать заряды от конца проводника с меньшим потенциалом к концу проводника с большим потенциалом. Необходимо осуществить круговорот зарядов,



Рис. 16.1

чтобы линии тока были замкнуты (рис. 16.1). Перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против силы электрического поля. Такое перемещение возможно только с помощью сил неэлектрического происхождения. Они называются сторонними силами. Эти силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока, меняющимися магнитными полями и т.д.

Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **электродвижущей силой (ЭДС)  $\varepsilon$** , действующей в цепи или на ее участке:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \quad (16.6)$$

Стороннюю силу  $F_e$ , действующую на заряд  $q$ , можно представить в виде

$$F_e = E^* q, \quad (16.7)$$

где  $E^*$  — называется **напряженностью поля сторонних сил**. Работа сторонних сил над зарядом на участке цепи 1–2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 F_e d\mathbf{l} = q \int_1^2 E^* d\mathbf{l}. \quad (16.8)$$

Следовательно, действующая на данном участке ЭДС, имеет вид

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 E^* d\mathbf{l}. \quad (16.9)$$

Интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, дает ЭДС, действующую в данной цепи:

$$\varepsilon_{12} = \oint E^* d\mathbf{l}. \quad (16.10)$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электрического поля  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ . Результирующая сила, действующая на заряд в каждой точке цепи, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_e = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (16.11)$$

Работа, совершаемая этой силой по перемещению заряда из точки 1 в точку 2, определяется выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q \int_1^2 \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (16.12)$$

Величина, численно равная работе электрических сил и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда, называется **падением напряжения** или **напряжением**  $U$  на данном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (16.13)$$

Участок цепи, на котором на заряд действуют сторонние силы, называется **неоднородным**. Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным** и  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ . В этом случае напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка цепи.

### **Сопротивление проводников**

**Закон Ома.** Сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения на этом проводнике:

$$I = \frac{1}{R}U,$$

где  $R$  — **электрическое сопротивление** проводника. Величина сопротивления проводника зависит от формы, размеров и материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника имеем

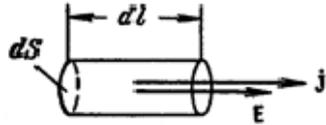


Рис. 16.2

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $l$  – длина проводника,  $S$  – площадь его поперечного сечения,  $\rho$  – **удельное электрическое сопротивление** проводника.

Его размерность в СИ – Ом · м.

В изотропном проводнике упорядоченное движение зарядов происходит в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Поэтому направления векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают. Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем высотой  $dl$  и площадью основания  $dS$  (рис. 16.2). Через поперечное сечение цилиндра течет ток  $j dS$ . Напряжение, приложенное к цилиндру, равно  $E dl$ . Сопротивление цилиндра равно  $\rho \frac{dl}{dS}$ .

Подставив эти равенства в закон Ома, получим

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl \text{ или } j = \frac{1}{\rho} E.$$

В векторном виде получим **закон Ома в дифференциальной форме**:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}.$$

Величина  $\sigma$  называется удельной электрической проводимостью. Ее размерность в системе СИ обозначается 1/Ом · м или См (Сименс)/м.

### Лекция. 17. Электрические цепи постоянного тока

На носители тока действуют электростатические силы  $e\mathbf{E}$  и сторонние силы  $e\mathbf{E}^*$ . Если кроме электростатической силы на носители действуют сторонние силы, то средняя скорость упорядоченного движения носителей будет пропорциональна суммарной силе  $e\mathbf{E} + e\mathbf{E}^*$ . Соответственно, плотность тока в этих точках пропорциональна сумме напряженностей:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (17.1)$$

Эта формула выражает в дифференциальной форме **закон Ома для неоднородного участка цепи**.

Для перехода к закону Ома в интегральной форме рассмотрим неоднородный участок цепи. Выберем направление движения по контуру цепи и спроектируем это векторное уравнение на элемент контура  $d\mathbf{l}$ . Получим

$$j_l = \sigma(E_l + E_l^*). \quad (17.2)$$

Выразим плотность тока через ток  $I$  в проводнике с площадью сечения  $S$ , а проводимость заменим удельным сопротивлением  $\rho$ :

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*. \quad (17.3)$$

Умножим это равенство на элемент контура  $d\mathbf{l}$  и проинтегрируем его вдоль контура:

$$I \int_1^2 \rho \frac{d\mathbf{l}}{S} = \int_1^2 E_l d\mathbf{l} + \int_1^2 E_l^* d\mathbf{l}. \quad (17.4)$$

Интеграл от выражения  $\rho d\mathbf{l}/S$  представляет собой сопротивление  $R$  участка цепи между точками 1 и 2. Первый интеграл в правой части равен разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  на участке цепи между точками 1 и 2, а второй инте-

грал равен ЭДС  $\varepsilon_{12}$ , действующей на этом участке. Следовательно:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (17.5)$$

Ток и ЭДС – величины алгебраические. Если ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении, то  $\varepsilon_{12} > 0$ . Если препятствует, то  $\varepsilon_{12} < 0$ . Из этого равенства получим формулы для тока:

а)  $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$  для участка цепи, не содержащего

ЭДС, где  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  – разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи;  $R$  – сопротивление участка;

б)  $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon_{12}}{R}$  для участка цепи, содержащего ЭДС,

где  $\varepsilon_{12}$  – ЭДС источника тока;  $R$  – полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

в)  $I = \frac{\varepsilon}{R + R_i}$  для замкнутой (полной) цепи  $\varphi_1 = \varphi_2$ , где

$R$  – внешнее сопротивление цепи;  $R_i$  – внутреннее сопротивление цепи (сопротивление источников тока);  $\varepsilon$  – алгебраическая сумма всех ЭДС.

### ***Правила Кирхгофа***

Узлом цепи называется точка, в которой сходятся более чем два проводника (рис. 17.1) Ток, текущий к узлу, имеет один знак, текущий от узла, имеет другой знак.

**Первое правило Кирхгофа** – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узел, равна нулю:

$$\Sigma I_i = 0.$$

Это правило является следствием уравнения непрерывности или закона сохранения заряда.

Для постоянного тока  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Следовательно, алгебраическая сумма токов, текущих через воображаемую замкнутую поверхность, должна быть равна нулю.

Второе правило относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома (рис. 17.2):

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1, \\ I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2, \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (17.6)$$

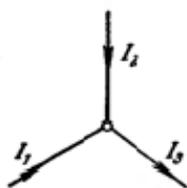


Рис. 17.1

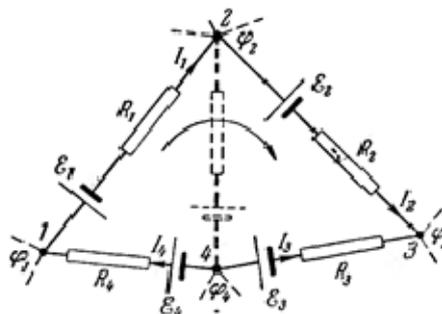


Рис. 17.2

При сложении этих равенств потенциалы сокращаются и получаются уравнения

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i, \quad (17.7)$$

которые выражают **второе правило Кирхгофа**. При составлении уравнений второго правила Кирхгофа токам и ЭДС нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода контура. Для определения сопротивления системы проводников следует пользоваться правилами:

- а)  $R = \sum R_i$  при последовательном соединении;
- б)  $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$  при параллельном соединении,

где  $R_i$  – сопротивление  $i$ -го проводника.

### **Работа и мощность тока**

Если к концам произвольного участка цепи постоянного тока приложено напряжение  $U$ , то за время  $t$  через каждое сечение проводника проходит заряд  $q = It$ . Силы электростатического поля и сторонние силы на этом участке цепи совершают работу

$$A = Uq = UIt. \quad (17.8)$$

Если на участке цепи нет ЭДС, то формулу для работы можно представить в виде

$$A = I^2 R t, \quad A = U^2 t / R. \quad (17.9)$$

Разделив работу на время, за которое она совершается, получим мощность, развиваемую током на данном участке цепи:

$$P = IU = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon_{12}I. \quad (17.10)$$

### **Закон Джоуля–Ленца**

При протекании тока в проводнике выделяется тепло в результате увеличения внутренней энергии. Его величина определяется по формуле

$$Q = UIt. \quad (17.11)$$

В соответствии с законом Ома, заменив  $U$  на  $IR$ , получим

$$Q = I^2 R t. \quad (17.12)$$

Это соотношение называется **законом Джоуля–Ленца**. Количество тепла, выделяющегося в единице объема за единицу времени, называется удельной тепловой мощностью  $P = \rho j^2$ .

### Лекция 18. Магнитное поле в вакууме и веществе

**Электрические токи взаимодействуют между собой.** Они притягиваются, если одинаково направлены, и отталкиваются, если направлены противоположно.

**Закон Ампера** – сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величине токов в них и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$F = k \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

В системе СИ  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная. Получаем

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$$

**Ампер** – это сила тока, который, проходя по двум бесконечно длинным проводникам, расположенным на расстоянии 1 метр в вакууме, создает силу  $2 \times 10^{-7} \text{ Н}$  на каждый метр длины.

**Опыт Эрстеда** – взаимодействие тока осуществляется через поле. Это поле оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. Силовую характеристику поля называют **магнитной индукцией  $\mathbf{B}$** . Магнитное поле не оказывает действие на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется. Электрически нейтральная система движущихся зарядов порождает магнитное поле (например, проводник, по которому движутся электроны и покоятся ионы). Движущиеся заряды изменяют свойства окружающего пространства – создают в нем магнитное поле. Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции. Единица магнитной индукции в СИ называется тесла (Тл).

Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в точке Р движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  заряда  $q$  равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

**Магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока** длины  $dl$ , определяется из закона Био–Савара–Лапласа. Умножив это выражение на количество зарядов в элементе тока  $nSdl$ , получим

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) \frac{I}{r^3} \text{ или } d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} d\mathbf{l},$$

где  $d\mathbf{B}$  – магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной  $dl$  с током  $I$  (рис. 18.1);  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция;  $\alpha$  – угол между радиусом – вектором и направлением тока в элементе провода.

Магнитная индукция в центре кругового тока:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl}{R^2}, \quad \alpha = \pi/2. \quad (18.1)$$

Проинтегрируем по контуру

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3}. \quad (18.2)$$

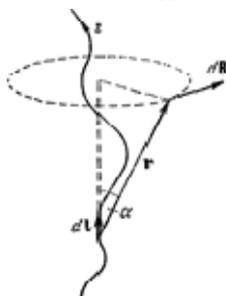


Рис. 18.1

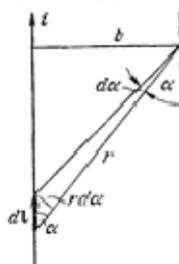


Рис. 18.2

**Магнитный момент кругового тока**

$p_m = I \cdot S = I \cdot \pi R^2$ . Тогда из (18.2) имеем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}, \quad (18.3)$$

где  $R$  – радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (18.4)$$

где  $h$  – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \mu_0 I / (2\pi b), \quad (18.5)$$

где  $b$  – расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. 18.2).

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (18.6)$$

**Закон Ампера:** сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, равна векторному произведению элемента тока на индукцию магнитного поля:

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила. Если ток сформирован движением заряда  $q$ , т.е.  $I = q/t$ , тогда  $\mathbf{l} = \mathbf{v} \cdot t$ , получим силу, действующую на движущийся заряд со стороны магнитного поля  $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Это выражение можно рассматривать, как определение **магнитной индукции  $\mathbf{B}$** .

**Сила Лоренца** – сила, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

### Работа при перемещении тока в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящим по ним проводником длины  $l$  (рис. 18.3). Сила, действующая на проводник длиной  $l$ , равна  $F = Il$ . При перемещении на величину  $dh$  сила совершает положительную работу:  $dA = Fdh = Il dh = IBdS$ .

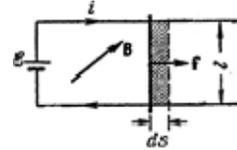


Рис.18.3

Поток индукции через поверхность  $S$  равен  $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . Следовательно,

$$dA = Id\Phi. \quad (18.7)$$

Величину  $d\Phi$  можно трактовать как поток индукции через площадь, описанную проводником при его движении. Чтобы найти работу, совершаемую при конечном перемещении проводника, проинтегрируем это выражение по всему контуру:

$$A_{12} = I(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (18.8)$$

Обозначено  $\Phi_1, \Phi_2$  – значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях. Поток через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (18.9)$$

так как отсутствуют магнитные заряды. Это теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{B}$ : поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Заменив поверхностный интеграл объемным  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$ , получим, что дивергенция индукции магнитного поля равна нулю:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

### Магнитное поле в веществе

Если провод с током расположен в среде, то магнитное поле меняется. Это означает, что всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент. Это связано с тем, что магнитные моменты молекул под действием внешнего магнитного поля приобретают преимущественную ориентацию (рис. 18.4). Намагниченное вещество создает магнитное поле  $\mathbf{V}'$ , которое накладывается на магнитное поле токов  $\mathbf{V}_0$ . Магнитное поле в веществе  $\mathbf{B} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'$ . Вещество под действием магнитного поля приобретает магнитный момент (намагничивается). Магнитные поля отдельных молекулярных токов не компенсируются друг с другом, и возникает поле  $\mathbf{V}'$ . **Намагниченность** – магнитный момент единицы объема:

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V}.$$

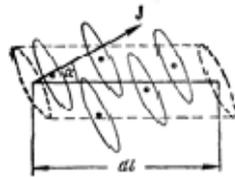


Рис. 18.4

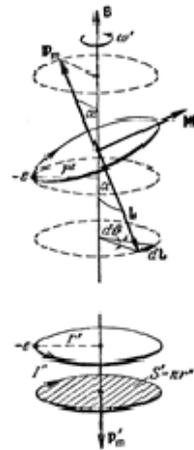


Рис. 18.5

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  определяется вектором намагниченности  $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$ , где обозначено  $\chi$  – **магнитная восприимчивость**:

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (18.10)$$

Связь магнитной индукции  $\mathbf{B}$  с напряженностью  $\mathbf{H}$  магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (18.11)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  – **магнитная проницаемость изотропной среды**;  $\mu_0$  – **магнитная постоянная**. В вакууме  $\mu = 1$ , и тогда магнитная индукция в вакууме

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (18.12)$$

**Диамагнетизм** возникает у веществ, атомы которых не обладают собственным магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля происходит прецессия электронных орбит. Дополнительное движение электронов приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома, направленного против поля (рис. 18.5). При этом внешнее поле ослабевает. Если атомы обладают собственным магнитным моментом, то внешнее поле ориентирует их по полю. Если результирующий магнитный момент оказывается направленным по полю, то это поле усиливается и вещество ведет себя как парамагнетик.

**Парамагнетизм** возникает из-за того, что электроны обладают **спином** – собственным магнитным моментом. Спины электронов стремятся ориентироваться по полю. Этому препятствует принцип Паули и тепловое движение. Диамагнетизм и парамагнетизм дают отличие дополнительного поля от внешнего в сотые доли процента. Поле усиливает в сотни и тысячи раз ферромагнетики.

**Ферромагнетизм** связан с взаимодействием спинов неспаренных электронов в соседних атомах. В результате взаимодействия спины соседних электронов располагаются по

отношению друг к другу параллельно (ферромагнетики) и антипараллельно (антиферромагнетики).

**Домены** (рис. 18.6) – области с параллельным расположением спинов (области спонтанной намагниченности).

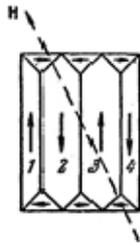


Рис. 18.6

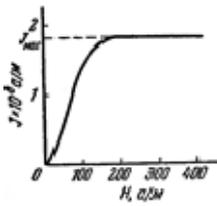


Рис. 18.7

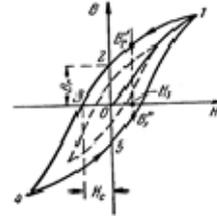


Рис. 18.8

Намагниченность слабомагнитных веществ изменяется линейно с напряженностью поля (рис. 18.7). Намагниченность ферромагнетиков зависит от напряженности поля сложным образом (рис. 18.8). Это явление называется гистерезисом.

### Основные законы

**Закон Ома.** Сила электрического тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения на этом проводнике:  $I = \frac{1}{R}U$ .

**Закон Ома в дифференциальной форме.** Плотность электрического тока, возникающего под действием электрического поля, пропорциональна напряженности поля. Коэффициент пропорциональности называется проводимостью:  $\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$ .

**Закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи.** Плотность электрического тока пропорциональна напряженности поля и напряженности электрического поля сторонних сил:  $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ .

**Закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи.** Сила электрического тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения на этом проводнике и суммарной электродвижущей силе, действующей на этом участке:  $IR = U_{12} + \varepsilon_{12}$ .

**Первое правило Кирхгофа.** Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узел, равна нулю:  $\sum I_i = 0$ .

**Второе правило Кирхгофа.** В любом выделенном замкнутом контуре разветвленной цепи сумма падений напряжений равна суммарной электродвижущей силе:  $\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i$ .

**Закон Джоуля–Ленца.** При протекании тока в проводнике выделяется тепло, величина которого в единицу времени пропорциональна квадрату величины тока:  $Q = I^2 R t$ .

**Сила Лоренца** – сила, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

**Закон Ампера.** Сила, действующая на проводник, равна векторному произведению элемента тока на индукцию магнитного поля.

**Закон Био–Савара–Лапласа.** Магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма полей, создаваемых отдельными элементарными участками токов:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) \frac{I}{r^3}.$$

### Задачи

1. Два одинаковых источника соединены последовательно. Во сколько раз изменится сила тока короткого замыкания, если источники соединить параллельно?

2. Определить разность потенциалов на зажимах каждой из двух последовательно соединенных электрических батарей с внутренним сопротивлением  $r_1 = 2 \text{ Ом}$  и  $r_2 = 1 \text{ Ом}$  и ЭДС  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4 \text{ В}$ . Батарея замкнута на внешнее сопротивление, равное  $1 \text{ Ом}$ .

3. Определить потери мощности в подводящих медных проводах при потребляемой мощности  $15 \text{ кВт}$ , если длина проводов равна  $3 \text{ км}$ , их диаметр –  $2 \text{ см}$ , а ЭДС источника тока –  $220 \text{ В}$ .

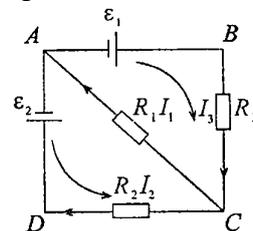
4. Напряжение на концах медного провода диаметром  $d$  и длиной  $l$  равно  $U$ . Во сколько раз увеличится удельная тепловая мощность тока при увеличении напряжения в 5 раз?

5. В сеть с напряжением  $200 \text{ В}$  необходимо включить лампочку, рассчитанную на напряжение  $100 \text{ В}$ . Определить величину добавочного сопротивления, включенного последовательно с лампочкой, позволяющего лампочке светить с нормальным накалом. Мощность лампочки равна  $40 \text{ Вт}$ .

6. В цепь батареи с ЭДС  $200 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $2 \text{ Ом}$  включено сопротивление  $30 \text{ Ом}$ . Определить к.п.д. батареи и ее полезную мощность.

7. В чайник налита вода объемом  $2 \text{ л}$  при температуре  $20^\circ \text{С}$ . На плитке мощностью  $1 \text{ кВт}$  вода в чайнике закипела через  $18 \text{ мин}$  после включения плитки. Определить количество тепловых потерь, потраченных не на нагрев воды.

8. Определить токи во всех участках электрической схемы (см. рис.), имеющей следующие параметры сопротивления:



$$R_1 = 50 \text{ Ом}, \quad R_2 = 20 \text{ Ом}, \quad R_3 = 5 \text{ Ом},$$

$$\text{ЭДС: } \varepsilon_1 = 4 \text{ В}, \quad \varepsilon_2 = 2 \text{ В}.$$

9. Две батареи с ЭДС  $\varepsilon_1 = 1 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$  и сопротивлением  $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,2 \text{ Ом}$  включены параллельно. Определить разность потенциалов на их общих зажимах.

10. Определить индукцию магнитного поля на расстоянии  $l \text{ м}$  от бесконечно длинного проводника с током  $2 \text{ А}$ .

11. Определить напряженность магнитного поля в центре кругового проводника с током  $2 \text{ А}$ . Радиус проводника равен  $4 \text{ см}$ .

12. Чему равна индукция магнитного поля на расстоянии  $5 \text{ см}$  от плоскости кругового витка радиусом  $10 \text{ см}$ ? Напряженность магнитного поля в центре витка равна  $100 \text{ А/м}$ .

13. По квадратной рамке со стороной  $30 \text{ см}$  течет ток  $5 \text{ А}$ . Определить напряженность магнитного поля в центре рамки.

14. Определить индукцию магнитного поля посередине между двумя прямолинейными бесконечными проводниками с токами  $I_1 = 10 \text{ А}$ ,  $I_2 = 20 \text{ А}$ . Расстояние между проводниками равно  $20 \text{ см}$ .

15. Определить индукцию магнитного поля внутри катушки, по обмотке которой проходит ток  $3 \text{ А}$ . Число витков катушки равно  $2000$ , ее длина составляет  $50 \text{ см}$ . Считать диаметр катушки малым по сравнению с ее длиной.

16. Объемная плотность энергии магнитного поля внутри катушки малого диаметра и длины  $50 \text{ см}$  равна  $2 \text{ Дж/м}^3$ . Определить число ампер-витков этой катушки.

---

**РАЗДЕЛ 5**  
**НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ**  
**ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ**

---

**Лекция 19. Электромагнитная индукция**

**Закон Фарадея** – в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление **электромагнитной индукции**, а ток называется индукционным.

При изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила ЭДС. Ее величина не зависит от способа изменения магнитного потока  $\Phi$  и определяется только скоростью его изменения.

**Правило Ленца** – индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Рассмотрим контур с движущимся проводником в однородном магнитном поле (рис. 19.1). Пусть проводник движется со скоростью  $v$ . На движущиеся электроны проводника со стороны магнитного поля действует сила, направленная вдоль его оси:

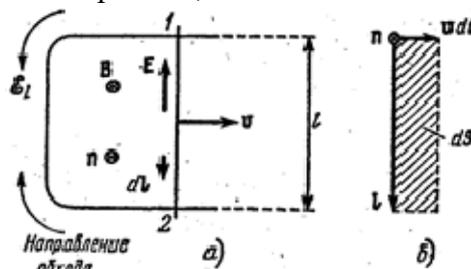


Рис. 19.1

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (19.1)$$

Действие этой силы эквивалентно действию на проводник электрического поля  $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Это поле неэлектриче-

ского происхождения. Циркуляция поля по контуру равна возникающей в нем электродвижущей силе:

$$\varepsilon_i = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \int_1^2 d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{l} = \mathbf{B}(\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt)}{dt}. \quad (19.2)$$

Определив  $dS$  – приращение площади контура за время  $dt$ , получим приращение потока индукции магнитного поля через контур:

$$\mathbf{B}(\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt) = -\mathbf{B}ndS = -\mathbf{B}d\mathbf{S} = -d\Phi. \quad (19.3)$$

Следовательно, ЭДС индукции определяется формулой

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (19.4)$$

Если контур состоит из  $N$  витков, то его ЭДС равна сумме ЭДС каждого витка:

$$\varepsilon_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sum \Phi) = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (19.5)$$

где  $\Psi = N\Phi$  – потокосцепление или полный магнитный поток.

Индукционные токи возникают и в сплошных проводниках при изменении в них магнитного потока. Их называют вихревыми токами или **токами Фуко**. Они могут достигать больших величин из-за малого сопротивления проводников. Согласно правилу Ленца токи Фуко направлены так, чтобы противодействовать причине, их вызвавшей. Движущиеся в сильном магнитном поле проводники испытывают сильное торможение в результате взаимодействия токов с магнитным полем. В проводах токи Фуко ослабляют ток внутри провода и усиливают его на поверхности. Это явление называется скин-эффектом.

### ***Явление самоиндукции***

Электрический ток, текущий в контуре, создает в нем магнитный поток  $\Psi$ . При изменении тока меняется поток и,

следовательно, возникает ЭДС. Это явление называется **самоиндукция**. В соответствии с законом Био-Савара магнитная индукция пропорциональна силе тока. Следовательно, ток в контуре и поток пропорциональны друг другу ( $\Psi = LI$ ) в отсутствие ферромагнетиков. Коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью** контура.

Индуктивность контура  $L = \Psi/I$  зависит от геометрии контура и магнитных свойств среды. В системе СИ магнитный поток 1 Вб при силе тока 1 А дает индуктивность 1 генри (Гн). При протекании тока  $I$  в бесконечном соленоиде индукция магнитного поля равна  $B = \mu_0 \mu n I$ . Его поток через каждый виток равен  $\Phi = BS$ , а полный магнитный поток равен

$$\Psi = N\Phi = n l B S = \mu_0 \mu n^2 l S I = \mu_0 \mu n^2 V I,$$

где  $l$  – длина соленоида,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $n$  – число витков на единицу длины,  $V = lS$  – объем соленоида. Индуктивность соленоида  $L = \mu \mu_0 n^2 V$ .

При изменении силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right). \quad (19.6)$$

Если при изменении силы тока индуктивность постоянна, то выражение для ЭДС самоиндукции имеет вид

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (19.7)$$

Знак минус в формуле обусловлен правилом Ленца.

### ***Ток при замыкании и размыкании цепи***

По правилу Ленца индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать

причине, его вызывающей. Пусть в цепь с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  включен источник ЭДС (рис. 19.2), в результате чего в цепи протекает постоянный ток  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ .

В момент времени  $t = 0$  отключим источник и замкнем цепь. При убывании силы тока возникнет ЭДС самоиндукции, которая будет поддерживать этот ток. Сила тока в цепи удовлетворяет уравнению

$$IR = \varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0. \quad (19.8)$$

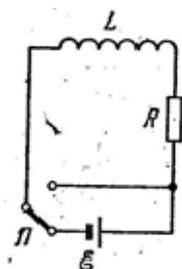


Рис. 19.2

Разделив переменные, получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt; \Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L} t + \ln const. \quad (19.9)$$

Воспользовавшись начальным условием  $t = 0, \Rightarrow const = I_0$ , получим

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (19.10)$$

После отключения источника сила тока не обращается мгновенно в нуль, а убывает с **постоянной времени цепи**

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

В случае замыкания цепи наряду с ЭДС в цепи возникает ЭДС самоиндукции. Следовательно, закон Ома в этом случае имеет вид

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}, \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Выражения для мгновенного значения силы тока в цепи, обладающей сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ , имеют вид:

$$\text{а) } I = \frac{\varepsilon}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right] \quad (\text{при замыкании цепи}), \text{ где } \varepsilon -$$

ЭДС источника тока;  $t$  – время, прошедшее после замыкания цепи;

$$\text{б) } I = I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \quad (\text{при размыкании цепи}), \text{ где}$$

$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – сила тока в цепи в момент времени  $t = 0$ ;  $t$  – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

### Взаимная индукция

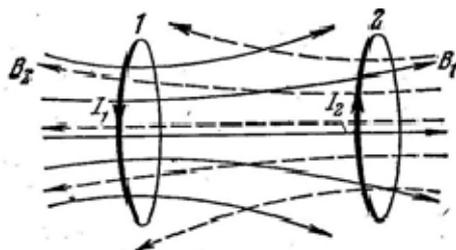


Рис. 19.3

Рассмотрим два контура (рис. 19.3). Ток силы  $I_1$  создает через контур 2 магнитный поток  $\Psi_2 = L_{21}I_1$ . При изменении тока  $I_1$  в контуре 2 возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$ .

Аналогично при протекании в контуре 2 тока силы  $I_2$  в контуре 1 возникает поток  $\Psi_1 = L_{12}I_2$ . При изменении тока  $I_2$  в контуре 1 возникает ЭДС  $\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$ .

Явление возникновения ЭДС в одном из связанных контуров при изменении тока в другом контуре называется **взаимной индукцией**. При этом коэффициенты  $L_{12} = L_{21}$ , зависящие от формы, размеров и взаимного расположения контуров, называются **взаимной индуктивностью контуров**. Взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на

общий тороидальный железный сердечник (рис. 19.4), определяется выражением

$$L_{12} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2.$$

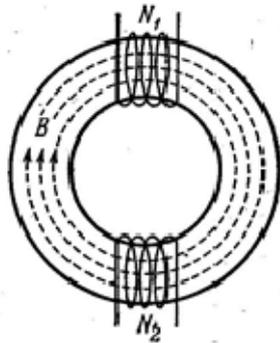


Рис. 19.4

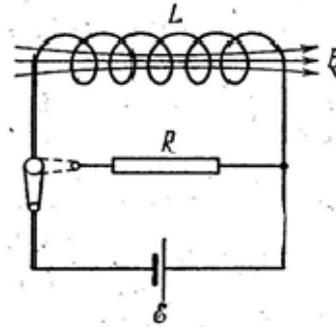


Рис. 19.5

### Энергия магнитного поля

При замкнутом ключе в соленоиде цепи устанавливается ток  $I$ , который создает магнитное поле в соленоиде (рис. 19.5). Если разомкнуть ключ, то через сопротивление  $R$  будет протекать ток, величина которого убывает со временем. Этот ток возникает в результате ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , равна

$$dA = \varepsilon_s I dt = -\frac{d\psi}{dt} I dt = -Id\psi. \quad (19.11)$$

Если индуктивность соленоида не зависит от  $I$ , то  $d\psi = LdI$ . Проинтегрировав это выражение по  $I$  в пределах от первоначального значения  $I$  до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = -\int_I^0 LI dt = \frac{LI^2}{2}. \quad (19.12)$$

Работа идет на приращение внутренней энергии сопротивления и соединительных проводов, которая выражается в их нагревании. Работа сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в соленоиде. Следовательно, проводник с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток силы  $I$ , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (19.13)$$

Работа совершается при установлении тока за счет источника ЭДС и идет целиком на создание магнитного поля. Энергия магнитного поля  $N$  связанных друг с другом контуров определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (19.14)$$

где  $L_{ik} = L_{ki}$  — взаимная индуктивность  $i$  и  $k$  контуров, а  $L_{ii} = L_i$  — индуктивность  $i$  контура.

### Лекция 20. Заряженные частицы в электромагнитном поле

Рассмотрим заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $v$  перпендикулярно однородному магнитному полю  $\mathbf{B}$  (рис. 20.1). Магнитная сила сообщает заряду перпендикулярное к скорости и постоянное по величине ускорение

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{e}{m} vB. \quad (20.1)$$

Заряженная частица движется по окружности радиуса  $R$ . Уравнение движения имеет вид

$$\frac{v^2}{R} = \frac{e}{m} vB. \quad (20.2)$$

Оно позволяет определить радиус окружности, по которой движется частица:  $R = \frac{mv}{eB}$ . Период вращения частицы  $T$  равен отношению длины окружности  $2\pi R$  к скорости движения  $v$ :

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}. \quad (20.3)$$

Период обращения частицы не зависит от ее скорости. Он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

Если частица движется под углом  $\alpha$  к магнитному полю, то ее скорость разложим на две составляющие по отношению к магнитному полю – перпендикулярную  $v_{\perp}$  и параллельную  $v_{\parallel}$ . Модули этих скоростей равны

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

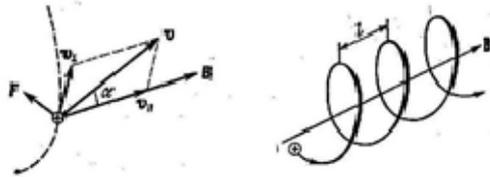


Рис. 20.1

Магнитная сила расположена в плоскости перпендикулярно магнитному полю и имеет модуль

$$F = evB \sin \alpha = ev_{\perp} B. \quad (20.4)$$

Составляющая магнитной силы вдоль магнитного поля равна нулю и не влияет на скорость частицы в этом направлении. Движение частицы можно представить как наложение двух движений. Это перемещение вдоль магнитного поля с постоянной скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  и равномерное движение по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Радиус окружности равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv}{eB} \sin \alpha. \quad (20.5)$$

Траектория движения представляет собой спираль, ось которой направлена вдоль магнитного поля. Шаг спирали  $l$  равен

$$l = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B} \cos \alpha. \quad (20.6)$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда.

### ***Отклонение заряженной частицы электрическим полем***

Пучок электронов в отсутствие поля движется со скоростью  $v_0$  по прямой линии (рис. 20.2) и попадает на перпендикулярный экран в точку 0. Определим смещение следа пучка под действием перпендикулярного электрического поля на длине пути  $l_1$ . Со стороны поля

на частицу действует сила  $F = eE$ , под действием которой она приобретает ускорение  $a_{\perp} = \frac{e}{m} E$ . В области поля частица движется в течение времени  $t = l_1/v_0$ . За это время частица сместится на расстояние

$$y_1 = \frac{1}{2} a_{\perp} t^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2}. \quad (20.7)$$

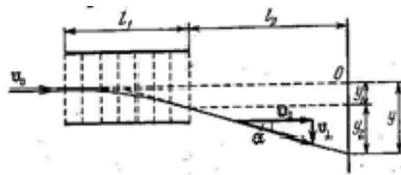


Рис. 20.2

При этом частица приобретает перпендикулярную составляющую скорости:

$$v_{\perp} = a_{\perp} t = \frac{e}{m} E \frac{l_1}{v_0}. \quad (20.8)$$

В дальнейшем частица летит прямолинейно под углом  $\alpha$  к первоначальному направлению движения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (20.9)$$

В результате частица получает дополнительное смещение

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = l_2 \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2}. \quad (20.10)$$

Полное смещение следа пучка относительно точки 0 равно

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) = \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (20.11)$$

Частица, покинув поле, летит так, как если бы она вылетела из центра конденсатора, создающего поле под углом  $\alpha$ .

Если вместо электрического поля в той же области расположено магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка, то частица получит ускорение  $a_n = \frac{F}{m} = \frac{e}{m} v_0 B$ . Для расчета смещения можно воспользоваться полученными выше формулами, заменив  $a_{\perp} = \frac{e}{m} E$  на  $a_n = \frac{e}{m} v_0 B$ . Обозначив смещение буквой  $x$ , получим

$$x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) = \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \beta. \quad (20.12)$$

Отклонение частицы как электрическим, так и магнитным полем пропорционально удельному заряду частицы. Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электронно-лучевых трубках.

Определение заряда и массы электрона было впервые осуществлено Томсоном с помощью разрядной трубки (рис. 20.3). Электронный пучок проходил между пластинами конденсатора и полюсами электромагнита, создавая светящееся пятно на экране. Включив магнитное поле и измерив смещение следа пучка  $x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right)$ , можно подобрать значение электрического поля так, чтобы пучок снова попал в точку 0. В этом случае электрическое и магнитное поле действуют на пучок с одинаковыми по величине и противоположно направленными силами  $eE = ev_0 B$ . Из этих двух равенств можно определить  $e/m$  и  $v_0$ .

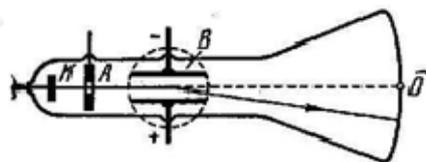


Рис. 20.3

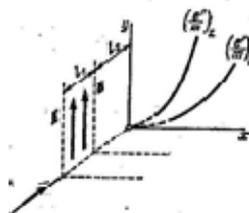


Рис. 20.4

Для определения удельного заряда электрона можно также использовать метод магнитной фокусировки. Метод заключается в определении точек фокусировки электронного пучка, ось которого направлена вдоль магнитного поля. Электроны вылетают под углом к магнитному полю и движутся по спирали с шагом  $l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}$ . Значение скорости определяется из условия равенства кинетической энергии электрона работе при прохождении ускоряющего потенциала  $eU = \frac{mv^2}{2}$ .

Эти методы определения заряда пригодны, если все частицы в пучке имеют одинаковую скорость. Ионы появляются в объеме и поэтому, проходя различные расстояния в ускоряющем потенциале, имеют различную скорость. Томсон предложил метод, в котором использовал параллельные друг другу электрическое и магнитное поля. Электрическое поле отклоняет ион в направлении  $y$ , а магнитное в направлении  $x$  согласно формулам:

$$y = \frac{e}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left( \frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (20.13)$$

Ионы с разными скоростями попадают в различные точки пластины в плоскости  $(x, y)$  и оставляют на ней следы (рис. 20.4). Исключая  $v$ , получим уравнение параболы

$$y = \frac{E}{B^2 l_1 (0,5l_1 + l_2)} \frac{m}{e} x^2. \quad (20.14)$$

Ионы с различной массой оставляют следы в виде разных парабол. Этим методом были обнаружены изотопы.

### *Ускорители заряженных частиц*

Для проведения опытов с заряженными частицами высоких энергий используют их ускорители.

**Генератор Ван-де-Граафа** (рис. 20.5). Электростатический генератор основан на том, что избыточные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Полый металлический шар, кондуктор, установлен на изолированной колонне. Внутри шара введена лента из прорезиненной ткани. Внизу на ленту подается заряд в несколько десятков киловольт, который переносится внутрь шара. Утечка заряда происходит за счет ионизации газа вблизи поверхности кондуктора. Ускорение частиц происходит в разрядной трубке, к электродам которой прикладывается разность потенциалов.

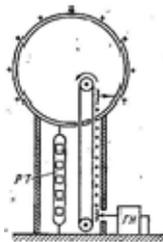


Рис. 20.5

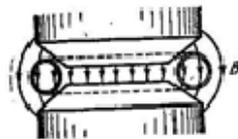


Рис. 20.6

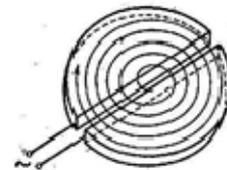


Рис. 20.7

**Бетатрон.** Индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем. Он состоит из тороидальной камеры, помещенной между полюсами электромагнита (рис. 20.6). Частота переменного тока в обмотке 100 Гц. Его магнитное поле создает

вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны, и удерживает их на орбите, совпадающей с осью камеры.

**Циклотрон** (рис. 20.7). В основу этого ускорителя положено такое свойство движущейся частицы, как независимость периода обращения в однородном магнитном поле от ее скорости.

## Лекция 21. Электрические колебания

В электрических цепях с переменным током могут возникать электрические колебания. Электромагнитные возмущения распространяются в цепи со скоростью света. Если за время  $\tau = l/c$  сила тока меняется мало, то такие токи называются квазистационарными. Условие квазистационарности  $\tau \ll T$ , где  $T$  – период изменений тока. Для мгновенных его значений справедлив Закон Ома и правила Кирхгофа.

Цепь, содержащая индуктивность и емкость, называется колебательным контуром. Колебания в контуре можно вызвать, сообщив обкладкам конденсатора начальный заряд или возбудив в индуктивности ток. Если сообщить конденсатору заряд  $q$ , то между его обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна  $q^2/2C$ . Если замкнуть конденсатор на индуктивность, то он начнет разряжаться и в цепи потечет ток. В результате энергия конденсатора перейдет в энергию магнитного поля в индуктивности. Эта энергия равна  $LI^2/2$ . При отсутствии активного сопротивления полная энергия контура остается постоянной. В результате ЭДС самоиндукции ток потечет в обратном направлении, что приведет к появлению заряда в конденсаторе. Колебаниям в контуре можно сопоставить колебания пружинного маятника. Потенциальная энергия упругой деформации  $kx^2/2$  переходит в кинетическую энергию  $m\dot{x}^2/2$ . Из сопоставления этих процессов следует, что энергия электрического поля аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии. Индуктивность играет роль массы  $L \Rightarrow m$ , обратная емкость играет роль коэффициента жесткости  $1/C \Rightarrow k$ , заряду соответствует смещение маятника  $q \Rightarrow x$ , а силе тока соответствует скорость  $I \Rightarrow \dot{x}$ .

### Собственные колебания

Найдем уравнение колебаний в контуре (рис. 21.1). Будем считать положительным ток, заряжающий конденсатор  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ . Напишем для цепи выражение закона Ома

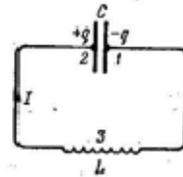


Рис. 21.1

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (21.1)$$

Для рассматриваемой цепи

$$R = 0, \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C, \varepsilon_{12} = \varepsilon_s = -L dI/dt = L d^2q/dt^2.$$

Подставив эти выражения в закон Ома, получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (21.2)$$

Вводя обозначение  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , запишем уравнение в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (21.3)$$

Его решение имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (21.4)$$

Заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ , называемой **собственной частотой** контура. **Формула Томсона** для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (21.5)$$

Напряжение на конденсаторе определяется по формуле

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (21.6)$$

Сила тока определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (21.7)$$

Сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . В момент максимума тока заряд обращается в нуль, и наоборот. Из формул (21.6)-(21.7) следует, что  $U_m = q_m/C$ ;  $I_m = \omega_0 q_m$ . Из этих равенств получаем

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (21.8)$$

Это выражение также можно получить исходя из равенства максимальных значений энергии электрического и магнитного поля.

### Свободные затухающие колебания

Реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 21.2). Запасенная в контуре энергия расходуется в этом сопротивлении на его нагрев. Следовательно, колебания в контуре затухают. Закон Ома для такой цепи имеет вид

$$IR = -q/C - LdI/dt. \quad (21.9)$$

Из этого уравнения получим

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (21.10)$$

Принимая обозначение  $\beta = \frac{R}{2L}$ , уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (21.11)$$

Это уравнение является уравнением затухающих колебаний. При условии  $\beta < \omega_0$  решение уравнения имеет вид

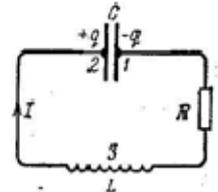


Рис. 21.2

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (21.12)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ . Частота затухающих колебаний меньше собственной частоты. При  $R = 0$  получаем  $\omega = \omega_0$ . Найдем выражения для напряжения и тока в контуре:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha);$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_m e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega_0 t + \alpha) - \omega \sin(\omega_0 t + \alpha)] = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha + \psi),$$

где обозначено  $\cos \psi = -\frac{\beta}{\omega_0}$ . При наличии в контуре актив-

ного сопротивления сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\pi/2$ . Затухание колебаний характеризуется **логарифмическим декрементом** затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}.$$

Величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания, называется добротностью контура  $Q = \frac{\pi}{\lambda}$ . Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим.

### **Вынужденные электрические колебания**

Вынужденные колебания возникают в случае внешнего воздействия на систему.

Такое воздействие можно осуществить последовательным включением в контур переменной ЭДС (рис. 21.3). Переменное напряжение  $U = U_m \cos \omega t$  надо добавить к ЭДС самоиндукции в законе Ома:

$$IR = -q/C - Ldi/dt + U_m \cos \omega t . \quad (21.13)$$

Закон Ома означает, что сумма падений напряжения на каждом элементе контура равна в каждый момент времени приложенному извне напряжению:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t . \quad (21.14)$$

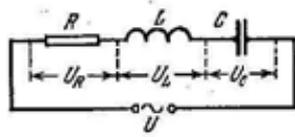


Рис. 21.3

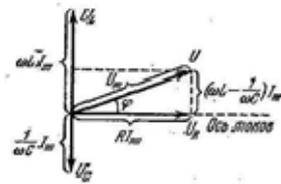


Рис. 21.4

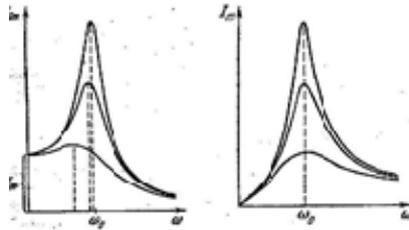


Рис. 21.5

Задавая гармоническое колебание с помощью векторов амплитуды, получим диаграмму напряжений (рис. 21.4).

А из равенства получаем уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t . \quad (21.15)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi) . \quad (21.16)$$

В этом равенстве обозначено

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (21.17)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{1/\omega C - \omega L}.$$

Это решение описывает установившиеся вынужденные колебания. На рис. 21.5 изображены резонансные кривые для напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}$  (слева) и силы тока в цепи  $I_m$ .

### Переменный ток

Установившиеся в цепи вынужденные колебания можно рассматривать как протекание переменного тока, создаваемого напряжением  $U = U_m \cos \omega t$ . Этот ток изменяется по закону  $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ . Амплитуда тока определяется напряжением  $U_m$ , параметрами цепи и частотой  $\omega$ :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , который зависит от параметров цепи и частоты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Выражение  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  называется **полным электрическим сопротивлением** или **импедансом**.

1. Полагаем  $R = 0, C \rightarrow \infty$ . Получим  $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ . Величину  $X_L = \omega L$  называют **реактивным индуктивным сопротивлением** или **индуктивным**

**сопротивлением** цепи. Индуктивное сопротивление растет с частотой. Постоянному току индуктивность сопротивление не оказывает.

2. Полагаем  $R = 0, L = 0$ . Получим

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}; \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow -\infty. \text{ Величину } X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ называют } \mathbf{реак-}$$

**тивным емкостным сопротивлением** или **емкостным сопротивлением** цепи. Емкостное сопротивление убывает с частотой. Для постоянного тока  $X_C \rightarrow \infty$ , так как постоянный ток через конденсатор течь не может.

3. Полагаем  $R = 0$ . Получим  $I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|}$ . Величи-

ну  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C$  называют **реактивным сопро-**

**тивлением** или **реактансом**.

Используя эти обозначения, можно записать  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$ ;  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ . Если значения  $R, X$  отложить вдоль катетов треугольника, то длина гипотенузы будет численно равна  $Z$ .

Определим мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Мгновенное значение мощности равно

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t)I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (21.18)$$

Среднее по времени значение мощности  $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$ . Так как  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ , то, подставляя это равенство, получим  $P = \frac{U_m I_m}{2} \frac{R}{Z} = \frac{R I_m^2}{2}$ . Такую же мощность раз-

вывает постоянный ток, сила которого равна  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ . Эта величина называется **действующим** или **эффективным значением силы тока**. Аналогичная величина  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  называется **действующим значением напряжения**. Выражение средней мощности через действующие значения силы тока и напряжения имеет вид  $P = UI \cos \varphi$ . Множитель  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

### Основные законы

**Закон Фарадея.** В замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток.

**Правило Ленца.** Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

**Токи Фуко.** Индукционные токи, возникающие в сплошных проводниках при изменении в них магнитного потока.

**Самоиндукция.** Явление возникновения ЭДС в контуре, электрический ток в котором изменяется со временем.

**Взаимная индукция.** Явление возникновения ЭДС в одном из связанных контуров при изменении тока в другом контуре.

Период обращения частицы при движении ее в магнитном поле не зависит от скорости частицы. Он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

**Формула Томсона.** Период электрических колебаний в контуре с индуктивностью и емкостью  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

**Импеданс** или полное электрическое сопротивление контура:  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ .

### Задачи

1. Электрон влетает в магнитное поле индукцией  $2 \text{ мТл}$  перпендикулярно магнитным силовым линиям. Определить радиус окружности, по которой движется электрон, если предварительно электрон был ускорен разностью потенциалов  $2 \text{ кВ}$ .

2. Протон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции и начинает двигаться по окружности. Во сколько раз изменится радиус окружности, если увеличить кинетическую энергию протона в 3 раза (скорость протона значительно меньше скорости света)?

3. Определить силу, действующую на провод длиной  $1 \text{ м}$ , по которому протекает ток  $100 \text{ А}$ . Провод находится в магнитном поле с индукцией  $0,2 \text{ Тл}$  перпендикулярно направлению магнитного поля.

4. Круговой контур радиусом  $1 \text{ см}$ , по которому протекает ток в  $3 \text{ А}$ , помещен в однородное магнитное поле с напряженностью  $200 \text{ кА/м}$ . Плоскость контура перпендикулярна направлению магнитного поля. Определить работу, которую надо совершить для поворота контура на  $90^\circ$  вокруг оси, совпадающей с диаметром контура.

5. Электрическое поле напряженностью  $1,2 \text{ кВ/м}$  направлено перпендикулярно магнитному полю с индукцией  $0,6 \text{ мТл}$ . В это электромагнитное поле влетает пучок электронов перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Определить, при какой скорости электронов при одновременном действии обоих полей электроны не испытывают отклонения.

6. Во сколько раз уменьшится ток в катушке, индуктивность которой равна  $0,4 \text{ Гн}$  и сопротивление  $2 \text{ Ом}$ , через  $0,03 \text{ с}$  после выключения ЭДС и замыкания катушки накоротко?

7. Сила тока, протекающего по катушке, изменяется по закону  $I = 2 - 0,3t^2$ . На концах катушки в момент времени  $4$  с наводится ЭДС самоиндукции  $0,02$  В. Чему равна индуктивность катушки?

8. Определить добротность контура, в котором за один период колебаний в тепло переходит  $5\%$  энергии.

9. Магнитная индукция изменяется по закону  $B = (3 + 2t^2) \cdot 10^{-2}$  (Тл). Контур площадью  $0,01$  м<sup>2</sup> расположен перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Найти закон изменения ЭДС индукции, возникающей в контуре.

10. Найти ЭДС индукции, возникающей на концах крыльев самолета, при его движении со скоростью  $900$  км/ч. Размах крыльев самолета равен  $20$  м. Вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля равна  $39,8$  А/м.

11. Индуктивность колебательного контура равна  $3$  мГн, а емкость может меняться от  $70$  нФ до  $500$  нФ. Определить диапазон волн, на который можно настроить контур.

12. В цепь переменного тока последовательно включены сопротивление  $200$  Ом, индуктивность  $1$  Гн и емкость  $40$  мкФ. Напряжение в сети  $220$  В, частота  $50$  Гц. Определить амплитуды падения напряжения на сопротивлении, емкости, индуктивности и ток в цепи.

---

**РАЗДЕЛ 6**  
**ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ**

---

**Лекция 22. Электромагнитные волны**

Переменное электрическое поле порождает магнитное поле, которое оказывается тоже переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое. Если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Это процесс периодический во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну. Из уравнений Максвелла можно получить уравнение для электрического поля электромагнитной волны

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

В этом уравнении обозначена скорость света  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ . В частном случае распространения плоской волны вдоль оси  $x$ , получим волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Функция, удовлетворяющая уравнениям, описывает волну, распространяющуюся с фазовой скоростью  $v = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ . В вакууме  $\varepsilon = \mu = 1$  скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (рис. 22.1), имеет вид  $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_m \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \alpha)$ ;  $\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}_m \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \alpha)$  где  $\mathbf{E}(x, t)$ ;  $\mathbf{H}(x, t)$  – значение колеблющейся величины век-

торов электрического и магнитного поля в момент  $t$  в точке с координатой  $x$ ,  $\mathbf{E}_m$ ;  $\mathbf{H}_m$  – максимальная амплитуда колебаний,  $\omega = 2\pi\nu$  – циклическая частота,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число, знак перед волновым числом зависит от направления движения волны,  $\alpha$  – начальная фаза колебаний.



Рис. 22.1

Длина волны  $\lambda$  и частота  $\nu$  связаны уравнением  $v = \lambda\nu$ , где  $v$  – скорость распространения волны. Волна характеризуется волновым вектором  $\mathbf{k} = \mathbf{n}k = \mathbf{n}\frac{2\pi}{\lambda}$ , который направлен по нормали к волновому фронту и вектору поляризации  $\mathbf{E}/E$ .

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии равна плотности энергии умноженной на скорость волны. Плотность энергии электромагнитного поля складывается из плотности энергии электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (22.1)$$

Так как  $E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$ , то получим

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}EH = \frac{1}{v}EH. \quad (22.2)$$

Умножив на скорость волны, получим модуль вектора плотности потока энергии волны:

$$S = wv = EH. \quad (22.3)$$

Векторы  $\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны. Направление вектора переноса энергии совпадает с их векторным произведением

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (22.4)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется **вектором Пойнтинга**.

Поглощаясь в теле, электромагнитная волна сообщает телу импульс, т.е. оказывает на него давление. Если плоская волна падает на плоскую поверхность, то электрическое поле возбуждает в теле ток плотности  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, объемная плотность которой равна

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}.$$

Направление силы совпадает с направлением распространения волны (рис. 22.2). Поверхностному слою единичной площади и толщины  $dl$  сообщается в единицу времени импульс

$$dK = fdl = \mu_0 j H dl. \quad (22.5)$$

В этом же слое в единицу времени поглощается энергия:

$$dW = j E dl. \quad (22.6)$$

Их отношение дает выражение

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}. \quad \text{Принимая во внимание равен-$$

ство  $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$ , получим  $\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$ . Электромагнитная волна, несущая энергию  $W$ , обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (22.7)$$

Плотность импульса (импульс единицы объема) электромагнитного поля равна  $k = \frac{1}{c} w$ . Заменяя плотность энергии на плотность ее потока, получим

$$\mathbf{k} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (22.8)$$

При переносе энергии плотность потока энергии равна плотности потока импульса, умноженной на  $c^2$ .

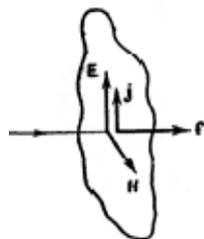


Рис. 22.2

Существование электромагнитных волн было подтверждено Герцем в 1888 г. В качестве излучателя волн он применил изобретенный им вибратор, который состоял из двух стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 22.3). При подаче напряжения на вибратор в промежутке проскакивала искра и в вибраторе возникали затухающие электрические колебания. За время горения искры генерировался цуг электромагнитных волн, длина волны которых в два раза превышала длину вибратора. Помещая его в фокус вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны, длина которых составляла 0,6–10 м. Регистрацию волн Герц осуществлял с помощью полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком. Он изучил отражение, преломление волн и получил стоячую волну. В 1896 году А.С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние 250 м.

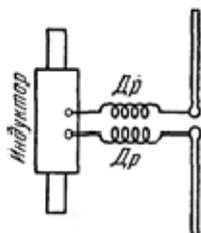


Рис. 22.3

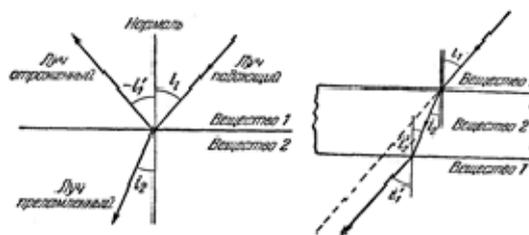


Рис. 22.4

Электромагнитные волны отражаются и преломляются на границе раздела двух сред. Рассмотрим падение электромагнитной волны на границу раздела двух сред под углом  $i_1$  (рис. 22.4). Из закона сохранения горизонтальной проекции импульса при отражении имеем закон отражения  $-i_1' = i_1$ . Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12}.$$

Величина  $n_{12}$  называется относительным показателем преломления второго вещества по отношению к первому. Если в веществе 1 расположена плоскопараллельная пластина вещества 2, то луч, прошедший пластину, оказывается параллельным падающему лучу. Соотношение для преломления луча на обеих поверхностях пластины имеет вид

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12}; \quad \frac{\sin i_2'}{\sin i_1'} = n_{21}.$$

Из геометрии следует  $i_2' = i_2$ ;  $i_1' = i_1$ . Перемножив равенства, получим  $n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$ . Это закон обратимости лучей. Если

навстречу лучу пустить другой луч, то он пройдет в обратном направлении по тому же пути. Показатель преломления по отношению к пустоте называется абсолютным показателем преломления данного вещества.

Относительный показатель преломления двух веществ равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Воспользовавшись этим соотношением, закон преломления можно записать в виде  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ . При переходе луча из оптически плотной среды в оптически менее плотную среду, луч удаляется от нормали к поверхности (рис. 22.5). Увеличение угла падения  $i_1$  сопровождается более быстрым ростом угла преломления  $i_2$ . В случае  $i_2 = \pi/2$  преломленный луч распространяется по касательной к поверхности. В этом случае угол падения  $i_m = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{12}$  является предельным. Энергия па-

дающей волны распределяется между отраженной и преломленной волной. При увеличении угла падения интенсивность отраженной волны растет, а преломленной – падает. Интенсивность преломленной волны при предельном угле падения обращается в нуль. При больших углах падения волна во вторую среду не проникает. Интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей волны. Это явление называется **полным внутренним отражением**.

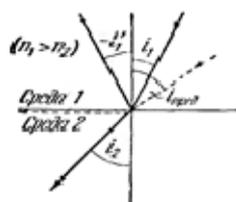


Рис. 22.5

### Лекция 23. Геометрическая оптика

Электромагнитная волна распространяется в вакууме со скоростью  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. В среде с показателем преломления  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  эта скорость соответственно в  $n$  раз меньше.

Многие оптические явления можно рассматривать исходя из представления о световых лучах. Это – геометрическая или лучевая оптика. В изотропной среде под лучами понимают линии, нормальные к волновым поверхностям. Вдоль этих линий распространяется световая энергия. При пересечении лучи не возмущают друг друга. В однородной среде они прямолинейны. На границах сред они претерпевают отражение и преломление. Представления геометрической оптики справедливы, если можно пренебречь интерференцией и дифракцией световых волн.

Были известны четыре закона оптических явлений:

- 1) закон прямолинейного распространения света;
- 2) закон независимости световых лучей;
- 3) закон отражения света – отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения. Угол отражения равен углу падения;
- 4) закон преломления света – преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12}, \quad (23.1)$$

$n_{12}$  – относительный показатель преломления второго вещества по отношению к первому.

Закон обратимости  $n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$ .

Показатель преломления вещества по отношению к пустоте называется абсолютным показателем преломления (или просто **показателем преломления**) данного вещества.

**Относительный показатель преломления** двух веществ равен отношению их абсолютных показателей преломления  $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$ . Следовательно, закон преломления мож-

но представить в виде

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 .$$

Предельный угол  $i_1 = i_p$ , когда  $i_2 = \pi/2$ .

Волновая теория света разработана Гюйгенсом.

**Принцип Гюйгенса** – построение волнового фронта. Пусть на поверхность раздела двух сред падает плоская волна с фронтом  $AA'$  (рис. 23.1). Возбуждение вторичной волны в точке  $A'$  начнется раньше, чем в точке  $B$ , на время  $\Delta t$ , необходимое для того, чтобы волна в первой среде прошла путь  $AB = v_1 \Delta t$ . Угол  $AA'B$  равен углу падения  $i_1$ . Угол  $A'BV'$  равен углу преломления  $i_2$ . Следовательно,

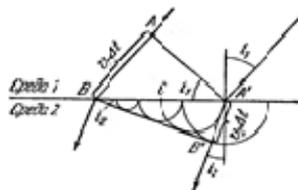


Рис. 23.1

необходимое для того, чтобы волна в первой среде прошла путь  $AB = v_1 \Delta t$ . Угол  $AA'B$  равен углу падения  $i_1$ . Угол  $A'BV'$  равен углу преломления  $i_2$ . Следовательно,

$$\sin i_1 = \frac{v_1 \Delta t}{BA'}; \quad \sin i_2 = \frac{v_2 \Delta t}{BA'}. \quad (23.2)$$

Разделив, получим

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (23.3)$$

Сравнивая с формулой (23.1), получим  $n_{12} = v_1/v_2$ . Если первая среда вакуум  $v_1 = c$ , то  $n = c/v$ .

**Принцип Ферма** – свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.

Если  $dt = ds/v$ ,  $v = c/n$ , получим  $dt = \frac{1}{c} nds$ . Время, затрачиваемое светом,  $t = \frac{1}{c} \int_1^2 nds$ . Согласно принципу Ферма, это время должно быть минимальным. Следовательно, минимальной должна быть **оптическая длина пути**  $L = \int_1^2 nds$ .

Однородная среда  $L = ns$ . Свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна.

### Свойства тонкой линзы

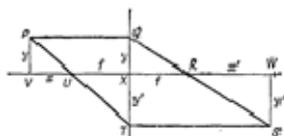


Рис. 23.2

1. Каждый луч, параллельный оси (рис. 23.2), фокусируется по другую сторону линзы в точке, называемой фокусом линзы и расположенной на расстоянии  $f$ .

2. Каждый луч, приходящий из фокуса по одну сторону линзы, выходит с другой стороны параллельно ее оси.

Пусть объект находится на расстоянии  $x$  от фокуса, а его размер равен  $y$ . Изображение находится на расстоянии  $x'$  от фокуса, а его размер равен  $y'$ . Из подобия треугольников PVU и UXT имеем  $\frac{y}{x} = \frac{y'}{f}$  и  $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}$ . Из равенств получаем **формулу Ньютона**

$$xx' = f^2. \quad (23.4)$$

Если обозначим расстояния  $s = x + f$ ;  $s' = x' + f$ , то получим формулу линзы

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (23.5)$$

Определение скорости света с помощью его аберрации – изменения видимого положения звезд на небе в результате движения Земли. Пусть направление на звезду перпендикулярно плоскости земной орбиты (рис. 23.3). Направим ось телескопа на звезду. За время  $\tau$ , которое требуется свету, чтобы пройти расстояние от объектива до окуляра, телескоп сместится вместе с Землей на расстояние  $v\tau$ . В результате изображение звезды окажется не в центре окуляра. Чтобы изображение было в центре, телескоп необходимо повернуть на угол  $\alpha$ , тангенс которого равен  $\operatorname{tg}\alpha = v/c$ . Зная скорость движения Земли, можно найти скорость света.

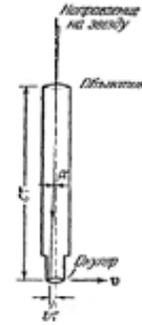


Рис. 23.3

### Световой поток

Электромагнитная волна несет с собой энергию. Плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга. Реальная электромагнитная волна представляет собой наложение колебаний с длинами волн в интервале  $\Delta\lambda$ . Распределение энергии светового потока характеризуется функцией распределения

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \quad (23.6)$$

где  $d\Phi_e$  – поток энергии света с длинами волн  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$ . Поток энергии, переносимый волнами с длиной в интервале  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , равен

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (23.7)$$

Действие света на глаз зависит от длины волны. Чувствительность глаза к излучению разной длины волны характеризуется функцией видности  $V(\lambda)$ . На длине волны 0,555 мкм она равна единице. Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина  $\Phi$ , называемая **световым потоком**. Для интервала  $d\lambda$  световой поток определяется как произведение потока энергии на соответствующее значение функции видности:

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_e. \quad (23.8)$$

Выразив поток энергии через функцию распределения энергии по длинам волн, получим

$$d\Phi = V(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda. \quad (23.9)$$

Полный световой поток равен

$$\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda. \quad (23.10)$$

Размерность светового потока совпадает с размерностью потока энергии. **Световой поток** – это поток лучистой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

### *Сила света*

Для характеристики точечных источников света применяется сила света  $I$ , которая определяется как поток излучения источника, приходящаяся на единицу телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}.$$

В общем случае сила света зависит от направления  $I = I(\vartheta, \varphi)$ . Если она не зависит от направления, то такой источник называется **изотропным**. Для него имеем

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}.$$

Единица силы света в системе СИ – кандела (кд).

Единицей светового потока является **люмен** (лм). Он равен световому потоку, излучаемому изотропным источником с силой света в 1 кд в пределах телесного угла в один стерадиан:  $1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}$ .

### ***Освещенность***

Степень освещенности падающим на нее световым потоком характеризуется величиной

$$E = \frac{d\Phi_f}{dS},$$

называемой освещенностью. Единицей освещенности является люкс (лк), равный освещенности, создаваемой потоком в 1 лм, равномерно распределенным по поверхности в  $1 \text{ м}^2$ .

### ***Светимость***

Протяженный источник света характеризуется светимостью  $R$  различных его участков. Это световой поток, испускаемый единицей поверхности наружу по всем направлениям (в пределах значений угла  $0, \pi/2$ ):

$$R = \frac{d\Phi_R}{dS}.$$

Светимость измеряется в тех же единицах, что и освещенность, – в **люксах**.

## Лекция 24. Интерференция

**Монохроматической** называется волна одной определённой и строго постоянной частоты. Реально таких волн не существует, однако эта идеализированная модель зачастую даёт хорошие результаты при анализе различных волновых явлений.

Две (и более) монохроматические волны называются **когерентными, если разность их фаз  $\varphi_1 - \varphi_2 = const$ , т.е. остается неизменной во времени.** Если в окружающее пространство от двух источников излучаются когерентные волны, то при их сложении образуется результирующая волна той же частоты, но с амплитудой, изменяющейся в пространстве в зависимости от условий суммирования.

В точках пространства, где амплитуда минимальна, достигается минимум интенсивности результирующего колебания. В точках, где амплитуда достигает наибольшего значения, интенсивность максимальна. Устойчивость или постоянство пространственной картины, которая называется **интерференционной**, обусловлена когерентностью источников колебаний.

**Интерференцией** называется сложение в пространстве двух или нескольких волн, вызванных разнесёнными когерентными источниками, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. При этом наблюдаются интерференционные **максимумы** или **минимумы**.

**Интерференция света** – частный случай интерференции электромагнитных колебаний в видимой области спектра частот  $\nu = c/\lambda = (4 \div 8) \times 10^{14}$  Гц, при которой происходит перераспределение светового потока и образование максимумов и минимумов интенсивности. Визуально она наблюдается без оптических устройств или же с их помощью.

Ослабление амплитуды колебаний в одних точках пространства и ее усиление в других не связаны с какими-либо превращениями энергии колебаний. В данном случае происходит пространственное перераспределение энергии колебаний.

Интерференционная картина будет устойчива, если волны генерируются **когерентными источниками**.

Физически создать два и более разнесенных в пространстве **когерентных** источника световых волн не представляется возможным, поэтому используются специальные способы разделения световых лучей от одного источника. Для этой цели используются различные оптические приборы и устройства – линзы, призмы и др. При этом необходима реализация определённых пространственных и временных условий для пучка света, при котором его можно использовать для наблюдения интерференции.

**Временная когерентность** определяется степенью монохроматичности источника, которая зависит от **времени когерентности**  $\tau_{\text{ког}}$ . Реальная световая волна имеет ширину спектра  $\Delta\omega$  относительно излучаемой частоты  $\omega$ , при этом

$$\tau_{\text{ког}} = 2\pi / \Delta\omega.$$

Временная когерентность определяет четкость или контрастность интерференционной картины, а также ограничивает возможность наблюдать интерференцию при увеличении оптической разности хода.

Свет излучается возбужденными атомами источника, например, атомами нагретой нити накаливания в лампочке. Длительность излучения возбужденного атома составляет единицы наносекунд, затем атом возвращается в нормальное состояние и излучение прекращается. Возбудившись вновь, атом снова начинает испускать световую волну, но уже с новой начальной фазой и т.д. Следовательно, излучение возбужденного атома состоит из **цугов** волн с длительностью порядка  $10^{-8}$  с.

**Волновой цуг** – прерывистое излучение света атомами в виде отдельных коротких импульсов, длительность которых на несколько порядков превышает период колебаний (для света  $\sim 10^{-15}$  с). Источник света состоит из большого числа атомов, спонтанно излучающих множество независимых цугов волн, начальные фазы которых не связаны между собой. Поэтому эти волны некогерентны. Когерентность может существовать только в пределах длительности цуга  $T_{цуг}$ , поэтому его средняя продолжительность является верхней границей времени когерентности:  $\tau_{ког} \approx T_{цуг} < 10^{-8}$  с. Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности  $\tau_{ког}$ .

**Длина когерентности**, или **цуга**, есть расстояние, на которое волна распространяется в вакууме за время когерентности:  $l_{ког} = c \cdot \tau_{ког}$ . При прохождении этого расстояния волны утрачивают когерентность, и наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности. Чем ближе волна к монохроматической, тем меньше ширина  $\Delta\omega$  спектра частот и больше время когерентности и, следовательно, длина когерентности  $l_{ког}$ .

Протяженный источник света, даже монохроматический, в общем случае не может являться когерентным, – его можно разбить на большое число точечных независимых излучателей. При этом интерференционные картины от элементов протяженного источника оказываются смещенными друг относительно друга, и в результате их наложения общая интерференционная картина оказывается размытой. Чем больше размеры источника света, тем меньше пространственная когерентность излучения этого источника.

**Пространственная когерентность** характеризует наличие взаимной когерентности вторичных световых пучков, взятых из различных точек первичного пучка, создаваемого источником света.

**Диаметр когерентности** – наибольший диаметр сечения волны, при котором любые два пучка, выделенные из различных точек внутри этого круга, остаются взаимно когерентными. Два пучка, полученные из точек, отстоящих друг от друга на расстояние большее диаметра когерентности, не будут интерферировать. Диаметр когерентности определяется отношением размеров источника ( $r$ ) к расстоянию до точки наблюдения ( $R$ ), то есть угловым размером источника.

**Естественный** (например, белый) свет есть совокупность большого числа независимых цугов волн, имеющих случайные сдвиги фаз между собой, в диапазоне длин волн  $\lambda_c = (0.35 \div 0.75)$  мкм. Такой свет не является монохроматическим ( $\Delta\omega/\omega \approx 1$ ). Для него время когерентности должно составлять  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-14}$  с, при этом длина когерентности составляет  $\sim 3$  мкм. Эти параметры обуславливают возможность наблюдения интерференции в естественном свете только при очень малых разностях оптических путей (тонкие плёнки).

В результате сложения цугов волн от двух разнесённых источников естественного света, например, ламп накаливания, возникает результирующее колебание с хаотично изменяющейся во времени амплитудой. Глаз человека регистрирует некоторую среднюю интенсивность света, которая по правилу суммирования случайных величин равна сумме квадратов амплитуд или интенсивностей от каждой лампы.

В настоящее время для получения когерентных волн используется лазер. Он создает излучение, обладающее высокой монохроматичностью ( $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-12}$ ) и, соответственно, высокой временной когерентностью  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-2}$  с. Это достигается за счет вынужденного излучения атомов активного вещества лазера в одной фазе. Длина «лазерного цуга» может составлять сотни и даже тысячи километров. Диаметр когерентности может составлять несколько метров, если лазерный луч оптически расширить до этих размеров. Эти свой-

ства лазерного излучения позволили осуществить, используя явление интерференции, запись и воспроизведение объёмных изображений – **голографию**.

Когерентные волны могут быть получены от одного естественного источника света. Разделенные лучи, пройдя различные оптические пути  $n_1l_1$  и  $n_2l_2$ , накладываются, образуя интерференционную картину. Применяются два метода деления первичной волны: деление фронта волны и деление интенсивности.

Первый метод (деление фронта) основан на том, что когерентные волны получают **от различных участков фронта волны одного источника света**.

Метод реализуется с помощью бипризмы Френеля и щелей Юнга. Бипризма Френеля состоит из двух одинаковых, сложенных основаниями призм с малыми преломляющими углами (рис. 24.1). Свет от источника  $S$  преломляется в обеих призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, исходящие из мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ , являющихся когерентными.

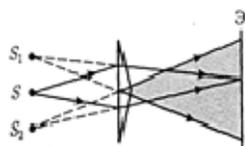


Рис. 24.1

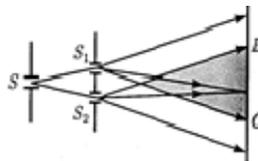


Рис. 24.2

В опыте со щелями свет из точечного источника  $S$  направляется на две (или несколько) равноудаленные узкие щели (рис. 24.2). В них «образуются» вторичные когерентные источники, которые дают на экране интерференционную картину.

Второй метод (деление интенсивности) использует расщепление первичной волны на вторичные волны путём частичного отражения. Такое отражение происходит на по-

верхностях прозрачных диэлектриков или на полупрозрачных зеркалах. Отражённая и прошедшая части световой волны проходят затем разные оптические пути и, вновь встретившись, образуют интерференционную картину. Так происходит интерференция в тонких плёнках, при образовании колец Ньютона и т.д.

### ***Плоские когерентные волны***

Пусть две монохроматические волны, с длиной в вакууме  $\lambda_0$ , после прохождения через среды с различными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , попадают в некоторую точку  $P$ . Разность фаз колебаний, возбуждаемых в точке этими волнами, возникает в результате прохождения ими различных оптических путей. Первая волна проходит геометрический путь  $l_1$  за время  $\tau_1$  со скоростью  $v_1$ , а вторая проходит геометрический путь  $l_2$  за время  $\tau_2$ , со скоростью  $v_2$ . Колебание в точке  $P$ , вызванное первой волной  $x_1 = A_1 \cdot \sin \omega(t - \tau_1)$ , колебание, вызванное второй волной, есть:  $x_2 = A_2 \cdot \sin \omega(t - \tau_2)$ , где  $\omega$  – циклическая или круговая частота колебаний. Разность фаз колебаний:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega\tau_1 - \omega\tau_2 = 2\pi(l_2 n_2 - l_1 n_1) / \lambda_0, \quad (4)$$

где  $\lambda_0 = cT$  – длина волны в вакууме,  $c$  – скорость света в вакууме,  $T = 2\pi/\omega$  – период колебаний. При сложении двух гармонических колебаний, имеющих одинаковое направление и частоту, получается гармоническое колебание той же частоты с амплитудой  $A$ , определяемой по теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (24.1)$$

Амплитуда результирующего колебания в любой точке пространства зависит от разности оптических путей лучей. Амплитуда  $A$  максимальна, т.е.  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ , при этом

$2\pi(l_2n_2 - l_1n_1)/\lambda_0 = 2\pi k$ , что соблюдается, когда оптическая разность хода  $\Delta = l_2n_2 - l_1n_1$  кратна четному числу полуволен:

$$\Delta = (l_2n_2 - l_1n_1) = 2k \frac{\lambda_0}{2}, \quad (24.2)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Значение амплитуды  $A$  минимально, когда  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ , в этом случае  $2\pi(l_2n_2 - l_1n_1)/\lambda_0 = (2k+1)\pi$ , что соблюдается, когда оптическая разность хода  $\Delta$  кратна нечетному числу полуволен:

$$\Delta = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (24.3)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Так как интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то полученные равенства являются, соответственно, условием максимума и минимума освещенности.

### ***Интерференция в тонких пленках***

Наблюдается при освещении пленок протяженным источником, например, на мыльных пленках, пленках масла, плавающих на поверхности воды и т.д. в естественных условиях, когда источником света служит участок неба, т.е. рассеянный дневной свет. При этом когерентные волны образуются путем расщепления световой волны вследствие отражения от верхней и нижней поверхностей пленки. Получаемая интерференционная картина представляет собой либо **полосы *равного наклона*** при условии одинаковой толщины пленки на всех ее участках, либо **полосы *равной толщины*** при различной толщине пленки на всей ее длине, например, для клина. Два интерферирующих луча  $1$  и  $2$ , идущие от удаленного источника в воздухе или вакууме, падают под углом  $i$  на пленку с показателем преломления среды  $n$  (рис. 24.3). На поверхности пленки в точке  $A$  луч разделяется на два – один отражается от верхней поверхности пленки, другой

преломляется под углом  $r$ . Преломленный луч, дойдя до точки  $D$ , частично преломится в воздух ( $n_0 = 1$ ), а частично отразится и пойдет к точке  $C$ . Здесь луч опять частично отразится (его из-за малой интенсивности не рассматриваем) и частично преломится, выходя в воздух под тем же углом  $i$ . Вышедшие из пленки лучи 1 и 2 когерентны, если их оптическая разность хода мала по сравнению с длиной когерентности падающей волны. Если на пути лучей поставить собирающую линзу, то они сойдутся в ее фокальной плоскости. В результате возникнет интерференционная картина, вид которой определяется оптической разностью хода. Разность хода между двумя интерферирующими лучами равна  $\Delta = n(AD + DC) - AB \pm \frac{\lambda_0}{2}$ , где член  $\pm \lambda_0/2$

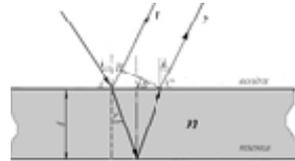


Рис. 24.3

обусловлен изменением фазы на  $\pi = 180^\circ$  при отражении света от оптически более плотной среды (оптическая плотность определяется абсолютным показателем преломления среды). Такое изменение фазы эквивалентно оптическому пути в  $\lambda_0/2$ , поэтому такой путь надо прибавить или отнять (знак выбирается так, чтобы окончательная формула была наиболее простой) от величины оптической разности вычисленной без учёта изменения фазы при отражении. В оптике принято говорить, что при отражении от оптически более плотной среды происходит «потеря полуволны». При отражении от оптически менее плотной среды «потеря полуволны» не происходит. Учитывая геометрию и закон преломления  $\sin(i) = n \cdot \sin(r)$ , получим  $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$ . С потерей полуволны на пленке в точке  $A$  ( $n > 1$ ) оптическая разность хода будет

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda_0/2.$$

Интерференционный максимум будет наблюдаться в случае, если

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и минимум, если:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\lambda_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оптическая разность хода лучей, отразившихся от верхней и нижней поверхности пленки, зависит от ее толщины  $d$ , угла падения, и коэффициентов преломления сред.

**Полосы равного наклона** – светлые и темные интерференционные полосы, полученные, когда на плоскопараллельную тонкую пленку (толщина  $d = const$ ) падает под *разными* углами расходящийся (или сходящийся) пучок света (рис. 24.4). При этом пленка освещается лучами всевозможных направлений, и каждая интерференционная полоса соответствует лучам, имеющим одинаковый наклон к пленке.

Интерференционная картина наблюдается на экране, установленном в фокальной плоскости собирающей линзы, или в глазу человека. Каждой интерференционной полосе соответствует определенное значение угла падения.

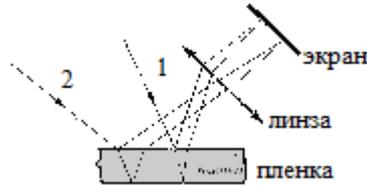


Рис. 24.4

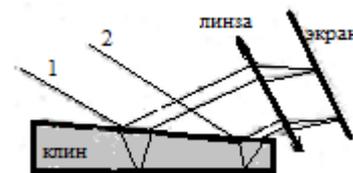


Рис. 24.5

**Полосы равной толщины** – светлые и темные интерференционные полосы, наблюдаемые на поверхности пластинки переменной толщины, на которую падает параллельный пучок лучей (рис. 24.5). Каждая полоса соответствует местам пластинки с одинаковой толщиной, поэтому интерференционная картина и называется полосами равной тол-

щины. Пути лучей в тонкой пленке малы по сравнению с расстоянием от пленки до источника, поэтому для подсчета разности их хода можно рассматривать источник, находящийся в бесконечности, а любые два интерферирующих луча считать параллельными.

Каждая интерференционная полоса (равных толщины или наклона) соответствует определенной оптической разности хода интерферирующих лучей. Для двух соседних темных (или светлых) полос эти разности различаются на длину волны  $\lambda_0$ .

Явление интерференции находит широкое применение на практике, в частности, для улучшения качества оптических приборов (просветление оптики) на поверхности линз наносится тонкая полимерная плёнка. Толщина её подбирается такой, чтобы в отражённом свете для середины видимого спектра (зеленый,  $\lambda_0 = 0,55$  мкм) был минимум. В сложных оптических системах много линз, и «просветление оптики» позволяет значительно увеличить проходящий (рабочий) световой поток. Такие же пленки наносятся на передние стёкла электропоездов, что значительно улучшает их прозрачность, что важно в ночных условиях. Характерный признак просветлённого стекла – его сиреневый цвет в отраженном свете. Это связано с тем, что условие минимума при отражении точно выполнено только для зеленого цвета, а для краёв видимого спектра красного и фиолетового отражение более существенно. Смесь этих цветов и дает сиреневый оттенок. Также интерференция применяется для создания узкополосных светофильтров и в различных измерительных приборах, например, интерферометрах. Интерферометры служат для сверхточного измерения длины, показателя преломления прозрачных тел. С их помощью можно производить косвенные измерения различных физических величин – вибрации, скорости, концентрации раствора и пр.

**Голография** – метод получения объёмного изображения объекта, основанный на интерференции волн. С появле-

нием лазеров открылись многочисленные и разнообразные возможности практического использования голографии в радиоэлектронике, оптике, физике и различных областях техники. Принцип получения следующий: фотографируемый объект (рис. 24.6) освещается широким лазерным световым пучком (он когерентен по всему сечению), рассеянное (отражённое) объектом излучение попадает на фотопластинку (сигнальная волна). Одновременно на фотопластинку направляется волна от того же источника света (опорная волна). На фотопластинке образуется и фиксируется интерференционная картина – сложный узор из светлых и тёмных полос. Невооружённым глазом увидеть структуру голограммы невозможно, так как размеры полос порядка длины волны света (меньше микрометра) и только в микроскоп эти полосы становятся видны.



Рис. 24.6

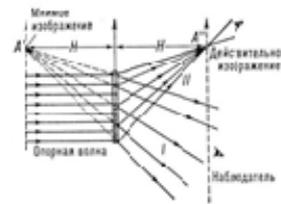


Рис. 24.7

Чтобы получить изображение, голограмму просвечивают тем же лазерным пучком (опорным), который, проходя сквозь голограмму, образует три световых пучка, один из которых полностью соответствует сигнальной волне, т.е. даёт объёмное изображение объекта (рис. 24.7). Возможности голографии существенно расширяются, если голограмму записывать на толстослойной эмульсии. В этом случае интерференционная картина получается трёхмерной, благодаря чему голограмма приобретает новые свойства. В частности, такая голограмма позволяет наблюдать изображение объекта при освещении её монохроматическим (белым) светом.

## Лекция 25. Дифракция

**Дифракция** – это явление огибания волнами препятствий или их отклонения вблизи препятствий от законов геометрической оптики. Дифракция наблюдается при распространении волн вблизи препятствий или вдоль границы раздела двух сред, при прохождении волн через отверстия.

Явление дифракции обусловлено тем, что при всяком ограничении волны ее фронт стремится в дальнейшем восстановиться. Поэтому распространение энергии в волне происходит не только вдоль нормали к волновому фронту (т.е. вдоль луча), но и в поперечном направлении, вдоль самих фронтов. Это приводит к распространению волн в область геометрической тени, – пространство, ограниченное крайними лучами, касательными к препятствию.

Необходимость учета явления дифракции и возможность ее наблюдения зависят от соотношения между длиной волны  $\lambda$ , характерным размером препятствия или отверстия  $D$  и расстоянием до точки наблюдения  $l$ . Характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра  $\frac{D^2}{l\lambda}$ ,

$$\text{где } \frac{D^2}{l\lambda} \begin{cases} \ll 1 & \text{– соответствует дифракции Фраунгофера,} \\ \approx 1 & \text{– соответствует дифракции Френеля,} \\ \gg 1 & \text{– соответствует геометрической оптике (отсутствие дифракции).} \end{cases}$$

**При дифракции Фраунгофера** источник света и точка наблюдения весьма далеки от препятствия, поэтому фронт волны, падающей на препятствие, а также фронт волны, приходящей в точку наблюдения, можно считать плоскими. Для наблюдения дифракции Фраунгофера вместо удаления точки наблюдения обычно используют линзу и наблюдают ди-

фракционную картину в ее фокальной плоскости.

Угловое расхождение пучка  $\varphi$  по порядку величины соответствует отношению  $\lambda/D$ , т. е.

$$\varphi \approx \frac{\lambda}{D}.$$

Пройдя расстояние  $L$  от отверстия (рис. 25.1), пучок расширяется по диаметру на величину  $\Delta D$ :

$$\Delta D \approx \frac{\lambda L}{D}.$$

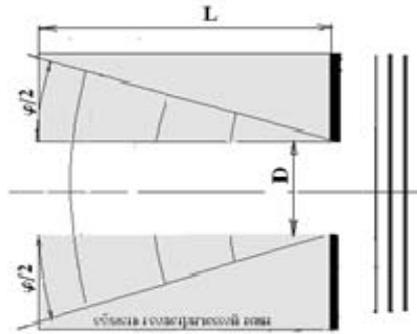


Рис. 25.1

Если  $\Delta D \ll D$ , то дифракция незаметна, на экране в этом случае будет хорошо очерченная тень, а если используется линза, то края изображения отверстия будут резкими. Дифракцию можно наблюдать от больших предметов, для этого достаточно, чтобы  $L$  было велико. При наблюдении дифракции в пределах лабораторного стола ( $L \approx 1$  м) размеры препятствия должны быть весьма малы ( $D < 1$  мм). Дифракция накладывает ограничения на разрешающую способность приборов, использующих волновые явления.

**Способность линзы создавать отдельные изображения двух близких друг к другу точечных объектов называется разрешающей способностью.** Чем ближе находятся друг к другу два изображения, оставаясь различимыми

(не сливаясь в одно пятно), тем выше разрешающая способность линзы.

В основе приближенных расчетов дифракционных явлений лежит принцип Гюйгенса–Френеля, уточненный Кирхгофом.

**Гюйгенс обосновывал способ геометрического построения фронта волны в любой момент времени с помощью вспомогательных вторичных источников, так что каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, может рассматриваться как источник вторичных волн.** Поверхность, огибающая вторичные волны, указывает на положение (к этому моменту времени) фронта действительно распространяющейся волны. Принцип был успешно применен для выводов законов отражения и преломления, но не позволил определить интенсивность (амплитуду) волны в различных точках пространства. Для объяснения интерференции, дифракции, прямолинейности распространения света и др. Френель обобщил и видоизменил принцип Гюйгенса, дополнив его рядом постулатов.

При этом источник света можно заменить эквивалентной системой вторичных точечных когерентных источников, расположенных на произвольной поверхности. Мощности, излучаемые участками поверхности, определяются амплитудой дошедшего до каждого участка излучения. Интенсивность излучения уменьшается с увеличением угла между направлением распространения света и нормалью к поверхности, становится равной нулю для углов, равных или больших  $\pi/2$ .

**Френель указал, что амплитуду волны можно найти, просуммировав волны от отдельных вторичных источников с учетом их фаз, дал аналитический способ расчета амплитуды в каждой точке пространства.**

Практически это делается так: источник света  $S$  окружается произвольной поверхностью  $\Sigma$ , все элементы  $d\sigma$  ко-

торой следует рассматривать как новые, вторичные когерентные источники (рис. 25.2).

Амплитуда в точке  $P$  от элемента  $d\sigma$  будет

$$dA = K(\alpha) \frac{a_0 d\sigma}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi), \quad (25.1)$$

где  $a_0$  – определяется амплитудой волны, дошедшей до элемента  $d\sigma$ ;  $K(\alpha)$  – функция угла;  $\varphi$  – определяется фазой волны, дошедшей до элемента;  $\omega$  и  $k$  – частота и волновое число;  $r$  – расстояние от элемента  $d\sigma$  до точки  $P$ . Полная амплитуда в точке  $P$  будет равна

$$A = \int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} K(\alpha) \frac{a_0 d\sigma}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi), \quad (25.2)$$

т.е. результату интерференции волн от отдельных элементов поверхности.

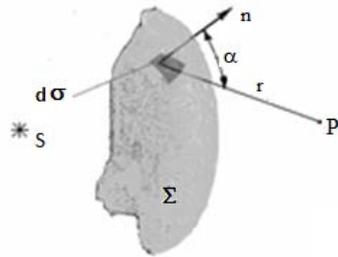


Рис. 25.2

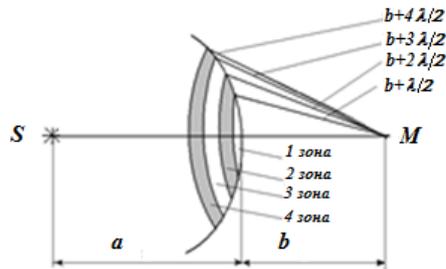


Рис. 25.3

Френель объяснил дифракцию с помощью интерференции вторичных волн, поэтому между понятиями «дифракция» и «интерференция» нет принципиального различия. Отличия имеются по характеру распределения вторичных источников. **Если вторичные или действительные источники дискретны (т.е. разделены в пространстве друг от друга), то говорят об интерференции волн от источников, если они непрерывно распределены по какой-либо поверхности, то говорят о дифракции волн.**

Метод, разработанный Френелем, основывался на определении амплитуды светового колебания, возбуждаемого в произвольной точке сферической волной, распространяющейся в изотропной однородной среде из точечного источника  $S$  (рис. 25.3). В любой момент времени волновая поверхность такой волны симметрична относительно прямой  $SM$  и разбивается на кольцевые зоны так, что расстояния от краев каждой зоны до точки  $M$  отличаются на  $\lambda/2$ . Такие зоны называются зонами Френеля. Расстояние  $b_m$  от внешнего края  $m$ -й зоны до точки  $P$  есть

$$b_m = b + \frac{m\lambda}{2}. \quad (25.3)$$

Колебания, приходящие в точку  $M$  от аналогичных точек двух соседних зон (лежащих в середине, у внешних краев и т.д.), находятся в противофазе. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из этих зон, будут отличаться по фазе на  $\pi$ . При вычислении площади  $\Delta S_m$   $m$ -й зоны Френеля (рассматриваются не слишком большие  $m$ ) ввиду малости  $\lambda$  можно пренебречь слагаемым, содержащим  $\lambda^2$ , и получить

$$\Delta S_m = \frac{\pi \cdot ab}{a+b}. \quad (25.4)$$

Выражение не зависит от  $m$ , это означает, что при не слишком больших  $m$  площади зон Френеля примерно *одинаковы*. Радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля равен:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda. \quad (25.5)$$

Если положить  $a = b = 1$  м и  $\lambda = 0,5$  мкм, то для радиуса первой (центральной) зоны получается значение 0,5 мм. Радиусы последующих зон возрастают  $\sim \sqrt{m}$ .

Расстояние  $b_m$  от зоны до точки  $M$  медленно растет с увеличением  $m$ ; угол  $\varphi$  между нормалью к элементам зоны и направлением на точку  $M$  также растет. Это приводит к тому,

что амплитуда  $A_m$  колебания, возбуждаемого  $m$ -й зоной, монотонно убывает с ростом  $m$ . Даже при очень больших  $m$ , когда площадь зоны начинает возрастать, убывание множителя  $K(\varphi)$  перевешивает рост  $\Delta S_m$ , так что  $A_m$  продолжает убывать.

Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке  $M$  зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m \dots$ . Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на  $\pi$ , поэтому амплитуда  $A$  результирующего колебания в точке  $M$  может быть представлена в виде  $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$ . В это выражение все амплитуды от нечетных зон входят со знаком «+», а от четных зон – со знаком «-», его можно записать в виде

$$A = A_1/2 + (A_1/2 - A_2 + A_3/2) + (A_3/2 - A_4 + A_5/2) + \dots \quad (25.6)$$

Вследствие монотонного убывания  $A_m$  можно приближенно считать, что  $A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$ , тогда выражения в скобках будут равны нулю, и равенство приобретет вид

$$A = \frac{A_1}{2}. \quad (25.7)$$

Амплитуда, создаваемая в некоторой точке  $M$  всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке  $M$  будет равна  $A_1$ . Соответственно интенсивность света в точке  $M$  будет в этом случае в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками  $S$  и  $M$  (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды).

Принцип Гюйгенса–Френеля применим и к расчету дифракции плоской волны на щели. Щель шириной  $b$  бесконечна в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа (рис. 25.4). В настоящей

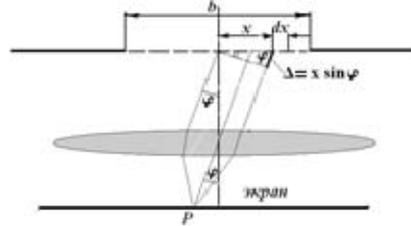


Рис. 25.4

волне изображен один из фронтов и ряд лучей. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Интерес представляет распределение амплитуды на экране в зависимости от угла  $\varphi$  в точке  $P$ . Разобьем открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели зоны шириной  $dx$ . Каждая такая зона создаст в точке  $P$  колебание, которое может быть представлено в виде

$$dE_{\varphi} = dA \sin(\omega t + \delta), \quad (25.8)$$

где  $dA = \frac{A_0}{b} dx$  – амплитуда колебания, возбуждаемого этой зоной, если  $A_0$  – алгебраическая сумма амплитуд колебания, возбуждаемых в какой-либо точке экрана всеми зонами,  $\delta = -2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$  – начальная фаза колебаний, возбуждаемых зоной с координатой  $x$  в той же точке, а  $\Delta = x \sin \varphi$  – оптическая разность хода, на которой формируется эта разность фаз.

Подставляя эти значения в выражение для  $dE_{\varphi}$ , получим

$$dE_{\varphi} = \left( \frac{A_0}{b} dx \right) \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right). \quad (25.9)$$

Проинтегрировав это выражение по всей ширине щели, найдем результирующее колебание, возбуждаемое в точке  $P$  открываемым щелью участком волновой поверхности:

$$E_{\varphi} = \frac{A_0 \lambda}{2\pi b \sin \phi} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) - \cos \left( \omega t + \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) \right] = \frac{A_0}{\pi b \sin \phi} \sin \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \sin \omega t \quad (25.10)$$

Выражение  $A_{\varphi} = \left| A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \right|$  является модулем

амплитуды результирующего колебания. Так как модуль угла  $\varphi$  не превышает  $\pi/2$ , то единственной особенностью является значение  $\varphi = 0$ , при котором получаем, используя замечательный предел  $\lim (\sin x/x) = 1$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $A_{\varphi} = A_0$ . Это значение можно получить и из тех рассуждений, что при  $\varphi = 0$  колебания от всех элементарных зон приходят в точку  $P$  в одинаковой фазе и поэтому амплитуда результирующего колебания равна алгебраической сумме амплитуд складываемых колебаний.

При значениях  $\varphi$ , удовлетворяющих условию  $\pi b \sin \varphi / \lambda = \pm k\pi$ , т.е.

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

амплитуда обращается в нуль. Таким образом, формула есть условие, определяющее положение *минимума* интенсивности света при дифракции от щели. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2}. \quad (25.11)$$

График функции представлен на рис. 25.5.

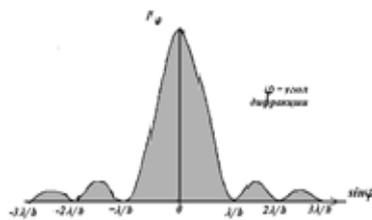


Рис. 25.5

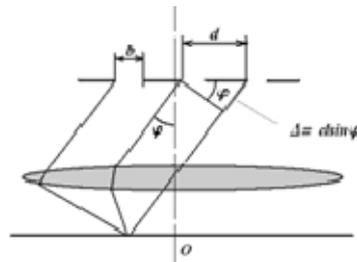


Рис. 25.6

Теория Френеля может быть применена для анализа работы более сложного прибора – *дифракционной решетки*.

Простейшая дифракционная решетка – это совокупность щелей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 25.6).

Свет, падая на дифракционную решетку, испытывает дифракцию на каждой щели (или рассеяние на каждой бороздке) и далее идет не параллельным пучком, а распределяется по углам в соответствии с законом дифракции (или рассеяния). В каждую точку экрана поступает волна от каждой щели. Эти волны когерентны, так как возбуждаются одной первичной волной и, следовательно, интерферируют. То есть для простейшей решетки дифракция на щелях дополняется интерференцией волн от отдельных щелей.

В случае решеток с бороздками происходит интерференция рассеянного излучения, – дифракции нет. Поэтому предлагалось изменить название таких решеток (как интерференционная), но ввиду общности явлений, происходящих в решетках любого типа, за ними осталось первоначальное название.

Условие для углов, под которыми в результате интерференции будут наблюдаться наиболее интенсивные пучки света – главные максимумы – реализуются в том случае, когда излучения от всех щелей будут в одной фазе (разность фаз  $\Delta\varphi = 0; 2\pi; 4\pi$  и т.д.). Из рисунка следует, что оптическая разность хода  $\Delta$  между соответственными лучами от двух соседних щелей определяется как

$$\Delta = d \cdot \sin \varphi ,$$

здесь  $d = a + b$  – постоянная или период решетки;  $\varphi$  – угол, под которым ведется наблюдение. Очевидно, что если  $\Delta$  равен целому числу длин волн  $k$ , то условие совпадения по фазе будет выполнено. Следовательно, условие главного максимума есть

$$d \cdot \sin \varphi = k\lambda , k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm k_{max}.$$

Максимальное значение  $k_{max}$  определяется исходя из неравенства  $\sin \varphi \leq 1$ :

$$k_{max} \leq d/\lambda.$$

Главные максимумы очень узки, имеют большую интенсивность. Между ними располагаются так называемые вторичные максимумы, их интенсивность мала и они обычно не видны на экране.

На рис. 25.7 изображено распределение интенсивности по углам для щелевой решетки, пунктиром показано, какое было бы распределение интенсивности, если была бы только дифракция от одной щели, умноженная на общее число щелей в квадрате. Именно интерференция от отдельных щелей приводит к картине *резких* максимумов. Если решетка не щелевая, то изменится только вид пунктирной кривой, – величина интенсивности главных максимумов. Это используется в специальных решетках, где бороздки имеют несимметричную форму для усиления одного из главных максимумов.

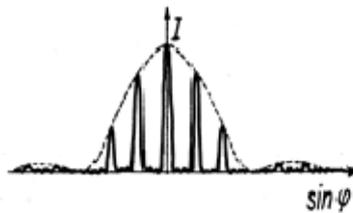


Рис. 25.7

## Лекция 26. Поляризация

В естественном свете имеются колебания, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 26.1). Плоскость колебаний для каждого цуга волн ориентирована случайным образом. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений представлены с равной вероятностью. В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называется **поляризованным**. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, свет называют **плоскополяризованным**. Плоскость, в которой колеблется световой вектор (т. е. вектор напряженности электрического поля  $E$ ), называется плоскостью колебаний.

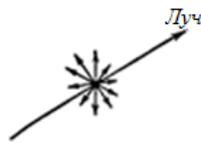


Рис. 26.1

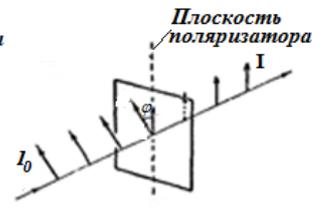


Рис. 26.2

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного света с помощью поляризаторов. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, которую мы будем называть **плоскостью поляризатора**, и полностью задерживают колебания, перпендикулярные к этой плоскости. Колебание амплитуды  $A$  (рис. 26.2), совершающееся в плоскости, образующей угол  $\varphi$  с плоскостью поляризатора, можно разложить на два колебания с амплитудами  $A_{\parallel} = A \cos \varphi$  и  $A_{\perp} = A \sin \varphi$ . Колебание, параллель-

ное плоскости поляризатора, несет с собой долю интенсивности, равную  $I \cos^2 \varphi$ . В естественном свете все значения  $\varphi$  равновероятны. Поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, будет равна среднему значению  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ . При вращении поляризатора вокруг направления естественного луча интенсивность прошедшего света остается одной и той же, изменяется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из прибора.

**Закон Малюса.** Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет интенсивности  $I_0$ . Следовательно, интенсивность прошедшего света  $I$  определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (26.1)$$

Поставим на пути естественного луча два поляризатора, плоскости которых образуют угол  $\varphi$ . Из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого  $I_0$  составит половину интенсивности естественного света  $I_*$ . Согласно закону Малюса из второго поляризатора выйдет свет интенсивности  $I_0 \cos^2 \varphi$ . Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I = \frac{1}{2} I_* \cos^2 \varphi. \quad (26.2)$$

Максимальная интенсивность, равная  $\frac{1}{2} I_*$ , получается при угле  $\varphi = 0$  (поляризаторы параллельны). При угле  $\varphi = \pi/2$  интенсивность равна нулю. Следовательно, скрещенные поляризаторы света не пропускают.

Свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений, называется **частично поляризованным**. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного света. Если пропустить частично поляризованный свет через поляриза-

тор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от  $I_{max}$  до  $I_{min}$ . Переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол  $\varphi = \pi/2$  (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности).

**Степенью поляризации** называют выражение

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Для плоскополяризованного света  $P=1$ , а для естественного света  $P=0$ .

**Эллиптическая поляризация.**

Рассмотрим две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны (рис. 26.3). Проекции световых векторов этих волн на оси координат изменяются по закону:

$$E_x = A_1 \cos \omega t$$

$$E_y = A_2 \cos(\omega t + \alpha)$$

Величины  $E_x$  и  $E_y$  представляют собой координаты конца результирующего светового вектора  $E$ . Два взаимно перпендикулярных гармонических колебания одинаковой частоты при сложении дают в общем случае движение по эллипсу. Следовательно, две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны, при наложении друг на друга дают волну, в которой световой вектор изменяется со временем так, что конец его описывает эллипс. Такой свет называется **эллиптически поляризованным**. При разности фаз  $\alpha = \pi$ , эллипс вырождается в прямую и получается **плоскополяризованный** свет. При разности фаз, равной нечетному числу  $\pi/2$ , и равенстве амплитуд складываемых волн эллипс

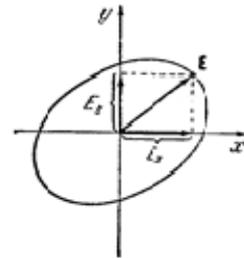


Рис. 26.3

превращается в окружность. В этом случае получается свет, **поляризованный по кругу**. В зависимости от направления вращения вектора  $E$  различают правую и левую эллиптическую и круговую поляризацию. Если по отношению к направлению, противоположному направлению луча, вектор  $E$  вращается по часовой стрелке, поляризация называется правой, в противном случае ее называют левой.

### ***Поляризация при отражении и преломлении***

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) не равен нулю, отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения, в преломленном луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения. Степень поляризации зависит от угла падения.

**Закон Брюстера.** При угле падения, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_B = n_{12}$$

отраженный луч полностью поляризован. В этом случае он содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения. Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном  $i_B$ , достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично. В формуле обозначено:  $n_{12}$  – показатель преломления второй среды относительно первой. Угол  $i_B$  называется **углом Брюстера** или **углом полной поляризации**. При падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Это явление можно объяснить тем, что падающая световая волна на границу диэлектрика с вакуумом, проникнув в диэлектрик, заставляет входящие

в состав атомов электрические заряды совершать вынужденные колебания. Колеблющиеся заряды излучают вторичные электромагнитные волны. Вне диэлектрика вторичные волны, налагаясь друг на друга, дают отраженную волну. Внутри диэлектрика вторичные волны складываются с падающей (первичной) волной. Результирующая волна, состоящая из первичной и вторичной волн, дает преломленную волну. Вынужденные колебания зарядов совершаются в направлении вектора  $E$  этой результирующей волны. Излучение колеблющегося заряда имеет направленный характер. Сильнее всего заряд излучает в направлениях, перпендикулярных к направлению колебаний, в то время как в направлении колебаний заряд не излучает. В отраженном луче колебания, перпендикулярные к плоскости падения, преобладают над колебаниями в других направлениях. Поэтому отраженный луч будет частично поляризован. При падении света под углом Брюстера направление колебаний заряда, параллельных плоскости падения (сплошная двусторонняя стрелка), совпадает с направлением отраженного луча, так что интенсивность излучения волны с соответствующим направлением поляризации обращается в нуль, а отраженный луч оказывается полностью поляризованным.

### *Поляризация при двойном лучепреломлении*

При прохождении света через некоторые кристаллы световой луч разделяется на два луча (рис. 26.4). Это явление называется **двойное лучепреломление**. При двойном лучепреломлении один из лучей удовлетворяет обычному закону преломления и лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью. Этот луч называется обыкновенным. Для другого луча, называемого необыкновенным, отношение  $\sin i_1 / \sin i_2$  не остается

постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от первоначального направления. Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

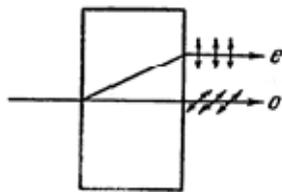


Рис. 26.4

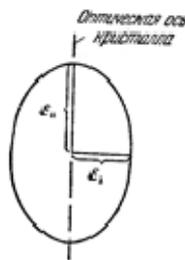


Рис. 26.5

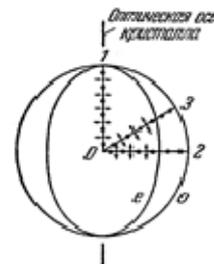


Рис. 26.6

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются, не разделяясь и с одинаковой скоростью. Это направление называется **оптической осью кристалла**. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главным сечением или **главной плоскостью кристалла**. Обыкновенный и необыкновенный лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость зависит от направления распространения волны. В одноосных кристаллах диэлектрическая проницаемость в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет различные

значения  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  (рис. 26.5). В других направлениях  $\varepsilon$  имеет промежуточные значения. Если значения  $\varepsilon$  для разных направлений в одноосном кристалле изображать отрезками, отложенными по этим направлениям из некоторой точки, то концы отрезков расположатся по поверхности эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с оптической осью кристалла (рис. 26.6). Так как  $\varepsilon = \sqrt{n}$ , то электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора  $\mathbf{E}$  соответствуют разные значения показателя преломления  $n$ . Поэтому скорость световых волн в кристалле будет зависеть от направления колебаний светового вектора  $\mathbf{E}$ . В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению кристалла.

Таким образом, при любом направлении обыкновенного луча вектор  $\mathbf{E}$  образует с оптической осью кристалла прямой угол и скорость световой волны будет одна и та же, равная  $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Изображая скорость обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, мы получим сферическую поверхность. Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении. Поэтому для разных лучей направления колебаний вектора  $\mathbf{E}$  образуют с оптической осью разные углы  $\alpha$ . Для луча 1 угол  $\alpha = \pi/2$ , поэтому скорость волны  $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ , а для луча 2 угол  $\alpha = 0$  и скорость волны равны  $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ . Для луча 3 скорость имеет промежуточное значение. Таким образом, волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения. В местах пересечения с оптической осью кристалла сфера и эллипсоид соприкасаются.

Величина  $n_0 = c/v_0$  называется **показателем преломления обыкновенного луча**, величина  $n_e = c/v_e$  – **показателем преломления необыкновенного луча**.

### ***Вращение плоскости поляризации***

При прохождении плоскополяризованного света через некоторые вещества наблюдается вращение плоскости колебаний светового вектора. Вещества, обладающие такой способностью, называются **оптически активными**. Кристаллические вещества, например кварц, сильнее всего вращают плоскость поляризации в случае, когда свет распространяется вдоль оптической оси кристалла. Угол поворота  $\varphi$  пропорционален пути  $l$ , пройденному лучом в кристалле:

$$\varphi = \alpha l .$$

Коэффициент  $\alpha$  называют **постоянной вращения**. Ее принято выражать в угловых градусах на миллиметр. Постоянная вращения зависит от длины волны. В растворах угол поворота плоскости поляризации пропорционален пути луча в растворе  $l$  и концентрации активного вещества  $c$ :

$$\varphi = [\alpha] cl ,$$

где  $[\alpha]$  называется **удельной постоянной вращения**.

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяются на право- и левовращающие. Если смотреть навстречу лучу, то в правовращающих веществах плоскость поляризации будет поворачиваться по часовой стрелке, в левовращающих – против часовой стрелки. Направление вращения (относительно луча) не зависит от направления луча в оптически активной среде. Например, если луч, прошедший вдоль оптической оси через кристалл кварца, отразить зеркалом и заставить пройти через кристалл еще раз в обратном направлении, то восстанавливается первоначальное положение плоскости поляризации.

### ***Магнитное вращение плоскости поляризации***

Оптически неактивные вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации под действием маг-

нитного поля. Это явление было обнаружено Фарадеем и поэтому называется иногда **эффектом Фарадея**. Оно наблюдается только при распространении света вдоль направления магнитного поля. Поэтому для наблюдения эффекта Фарадея в полюсных наконечниках электромагнита просверливают отверстия, через которые пропускается луч света. Исследуемое вещество помещается между полюсами электромагнита.

Угол поворота плоскости поляризации  $\varphi$  пропорционален пути  $l$ , проходимому светом в веществе, и напряженности магнитного поля  $H$ :

$$\varphi = VH.$$

Коэффициент  $V$  называется **постоянной Верде** или удельным **магнитным вращением**. Постоянная  $V$ , как и постоянная вращения  $\alpha$ , зависит от длины волны. Направление вращения определяется по отношению к направлению магнитного поля. Для положительных веществ направление поля и направление вращения образуют правовинтовую систему, а для отрицательных веществ они образуют левовинтовую систему. От направления луча знак вращения не зависит. Следовательно, если, отразив луч зеркалом, заставить его пройти через намагниченное вещество еще раз в обратном направлении, поворот плоскости поляризации удвоится.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникающей под действием магнитного поля прецессией электронных орбит. В результате прецессии электронов скорость волн с различным направлением круговой поляризации становится неодинаковой. Это приводит к вращению плоскости поляризации. Оптически активные вещества под действием магнитного поля приобретают дополнительную способность вращать плоскость поляризации, которая складывается с их естественной способностью.

### Основные законы

**Вектор Пойнтинга** – вектор плотности потока энергии электромагнитного поля:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

**Плотность импульса** электромагнитного поля

$$\mathbf{k} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

**Закон отражения света.** *Отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения. Угол отражения равен углу падения.*

**Закон преломления света.** *Преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ.*

**Принцип Ферма.** *Свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.*

**Световой поток:** *поток лучистой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.*

**Принцип Гюйгенса.** *Каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, может рассматриваться как источник вторичных волн.*

**Монохроматической** называется волна одной определённой и строго постоянной частоты.

**Когерентные волны.** *Две (и более) монохроматических волны, у которых разность их фаз остается неизменной во времени.*

**Интерференция.** *Сложение в пространстве двух или нескольких волн, вызванных разнесёнными когерентными источниками, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.*

**Дифракция:** явление огибания волнами препятствий или их отклонения вблизи препятствий от законов геометрической оптики.

**Дифракция Фраунгофера** – источник света и точка наблюдения находятся на расстоянии, много большем размера препятствия.

**Дифракция Френеля** – источник света и точка наблюдения находятся на расстоянии, сравнимом с размером препятствия.

**Принцип Гюйгенса–Френеля.** Амплитуду волны в каждой точке пространства можно найти, просуммировав волны от отдельных вторичных источников с учетом их фаз.

Если вторичные или действительные источники дискретны (т.е. разделены в пространстве друг от друга), то говорят об **интерференции** волн от источников, если они непрерывно распределены по какой-либо поверхности, то говорят о **дифракции** волн.

**Закон Малюса.** Интенсивность прошедшего через поляризатор плоскополяризованного света  $I$  определяется выражением  $I = I_0 \cos^2 \varphi$ .

**Закон Брюстера.** При угле падения, удовлетворяющем условию  $\operatorname{tg} i_B = n_{12}$  отраженный луч полностью поляризован.

**Эффект Фарадея** – способность вещества вращать плоскость поляризации света под действием магнитного поля.

### Задачи

1. Определить напряженность электрического поля в электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме, если напряженность магнитного поля в ней равна  $15 \text{ А/м}$ , а объемная плотность энергии равна  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}^3$ .

2. Показатель преломления мыльной воды равен  $1,35$ . Мыльный пузырь имеет зеленую окраску ( $\lambda = 540 \text{ нм}$ ) в области точки, ближайшей к наблюдателю. Определить минимальную толщину пузыря в указанной области.

3. Параллельный пучок света с длиной волны  $540 \text{ нм}$  нормально падает на диафрагму с круглым отверстием диаметром  $2 \text{ мм}$ . На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Наиболее темным центр дифракционной картины будет, если в отверстии укладываются две зоны Френеля. Определить, каким должно быть расстояние между диафрагмой и экраном для выполнения этого условия.

4. На пути плоской световой волны поместили стеклянную пластинку с показателем преломления  $1,5$  и толщиной  $1 \text{ см}$ . Определить увеличение оптической длины пути, если плоскость пластинки расположена перпендикулярно распространению света.

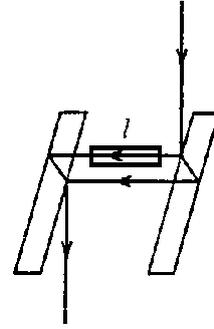
5. Электромагнитная волна частоты  $4 \text{ МГц}$  переходит из вакуума в диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon = 3,0$ . На сколько при этом уменьшится длина волны?

6. Фокусное расстояние линзы в воздухе равно  $30 \text{ см}$ . Определить фокусное расстояние этой линзы в воде, если показатель преломления материала линзы равен  $1,5$ , а показатель преломления воды равен  $1,33$ .

7. Определить предельный угол полного внутреннего отражения при падении красного луча на поверхность раздела стекло–воздух, если показатель преломления стекла для красного цвета равен  $1,51$ .

8. Определить фокусное расстояние для плоско-выпуклой линзы, если  $R_1 = 20 \text{ см}$  и  $R_2 = \infty$ .

9. В одно плечо интерферометра (см. рис.) поместили откачанную трубку длиной  $l = 20 \text{ см}$ . Когда трубку заполнили хлором, интерференционная картина для длины волны  $0,59 \text{ мкм}$  сместилась на 262 полосы. Определить показатель преломления хлора.



10. Монохроматический свет длиной волны  $590 \text{ нм}$  использовался в опытах Юнга по интерференции. Расстояние между отверстиями равно  $0,5 \text{ мм}$ . Экран располагался в  $2 \text{ м}$  от отверстий. Определить положение на экране двух первых светлых полос.

11. На стеклянную пластинку толщиной  $0,3 \text{ мкм}$  падает пучок белого света перпендикулярно к плоскости пластинки. Определить длины волн в видимом спектре ( $0,4-0,7 \text{ мкм}$ ), которые усиливаются в отраженном свете. Показатель преломления стекла равен  $1,6$ .

12. В установке для получения колец Ньютона используется монохроматический свет, падающий по нормали к поверхности пластинки. В отраженном свете радиусы двух соседних темных колец равны  $4,0 \text{ мм}$  и  $4,38 \text{ мм}$ . Определить длину волны падающего света, если радиус кривизны линзы равен  $6,4 \text{ м}$ .

13. На диафрагму с отверстием диаметром  $6 \text{ мм}$  нормально падает монохроматический свет длиной волны  $600 \text{ нм}$ . Экран расположен на расстоянии  $3 \text{ м}$ . Будет ли центр дифракционной картины темным или светлым?

14. Определить постоянную дифракционной решетки, для которой в направлении  $41^\circ$  совпадают максимумы линий  $656,3$  и  $410,2 \text{ нм}$ .

15. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы?

16. Угол между плоскостями пропускания двух поляризаторов равен  $30^\circ$ . Определить интенсивность света, прошедшего через оба поляризатора, если этот угол увеличить в 3 раза.

17. Угол преломления луча в жидкости равен  $30^\circ$ . Если известно, что отраженный луч полностью поляризован, то каким является показатель преломления жидкости?

---

**РАЗДЕЛ 7**  
**КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ**

---

**Лекция 27. Квантовые свойства излучения света**

Светящееся тело пополняет энергию из различных источников. **Тепловое излучение** это свечение, обусловленное их нагревом. Если окружить тело непроницаемой оболочкой, то будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим оболочку излучением (рис. 27.1). Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным, состояние системы тело–излучение будет равновесным. Единственный вид равновесного излучения – тепловое излучение. Его способность находиться в равновесии с излучающими телами связана с тем, что его интенсивность возрастает при повышении температуры. Характеристика теплового излучения – поток энергии (Вт).

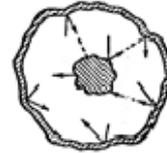


Рис. 27.1

**Энергетическая светимость тела  $R$**  – поток энергии, испускаемый единицей поверхности по всем направлениям. Обозначим  $dR(\omega)$  – поток энергии с единицы поверхности в интервале частот  $d\omega$ . При малой величине интервала частот имеем

$$dR(\omega) = r(\omega)d\omega. \quad (27.1)$$

Величина  $r(\omega)$  называется **испускательной способностью** тела. Из опыта – она зависит от температуры тела  $r = r(\omega, T)$ . Следовательно, энергетическая светимость зависит от температуры и определяется по формуле

$$R(T) = \int dR(\omega, T) = \int r(\omega, T)d\omega. \quad (27.2)$$

Излучение можно характеризовать длиной волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Испускательную способность можно записать:

$$r(\omega) = r(\lambda) \frac{\lambda^2}{2\pi c}. \quad (27.3)$$

Пусть на элементарную площадку поверхности тела падает поток лучистой энергии  $d\Phi$ , обусловленный электромагнитными волнами с частотами в интервале  $d\omega$ . Часть этого потока  $d\Phi'$  будет поглощена телом. **Поглощательная способность тела**  $a(\omega, T) = d\Phi'/d\Phi$  – отношение поглощенного потока к падающему на элементарную площадку поверхности потоку лучистой энергии в интервале частот  $d\omega$ .

**Абсолютно черное тело**  $a(\omega, T) = 1$ . При  $a(\omega, T) < 1$  тело серое. Внутри оболочки с температурой  $T$  поместим несколько тел (рис. 27.2). Поскольку температура тел не меняется, то тело, испускающее больше энергии, должно больше ее поглощать.



Рис. 27.2

Между испускательной и поглощательной способностью тела существует определенная связь:

$$\left[ \frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} \right]_1 = \left[ \frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} \right]_2 = \left[ \frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} \right]_3 = \dots$$

Индексы относятся к разным телам.

**Закон Кирхгофа** – отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же функцией частоты и температуры:

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} = f(\omega, T),$$

где  $f(\omega, T)$  – универсальная функция Кирхгофа. Для абсолютно черного тела  $a(\omega, T) = 1$  функция Кирхгофа равна испускательной способности тела  $f(\omega, T) = r(\omega, T)$ . Можно пользоваться функцией длины волны

$$f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T).$$

Модель абсолютно черного тела – замкнутая полость (рис. 27.3). Излучение, проникшее внутрь через отверстие, прежде чем выйти обратно из отверстия, претерпевает многократные отражения.

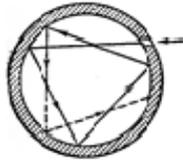


Рис. 27.3

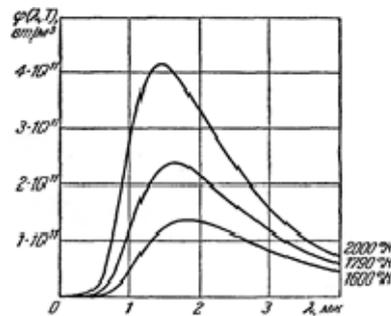


Рис. 27.4

При каждом отражении часть энергии поглощается. В результате практически все излучение любой частоты поглощается полостью. Если стенки имеют температуру  $T$ , то из отверстия выходит излучение, близкое по спектральному составу к излучению абсолютно черного тела при той же температуре. Его используют для определения функции Кирхгофа. Разлагая излучение в спектр, можно экспериментально найти вид функции Кирхгофа (рис. 27.4). Максимум спектра сдвигается в короткие волны с ростом температуры.

Теоретическое обоснование излучения абсолютно черного тела привело к понятию квантов энергии. **Закон Стефана–Больцмана** устанавливает соотношение между энергетической светимостью абсолютно черного тела и его абсолютной температурой

$$R(T) = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4,$$

$\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

Исходя из электромагнитной теории, Вин показал, что функция спектрального распределения должна иметь вид

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

где  $F$  – неизвестная функция. Из этой формулы можно получить  $\varphi(\lambda, T)$  от длины волны:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T).$$

Из ее вида можно получить **закон смещения Вина**:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где  $\lambda_m$  – длина волны, на которую приходится максимум функции  $\psi(\lambda, T)$ . Константа  $b = 2,9 \times 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ .

Рэлей и Джинс определили функцию  $f(\omega, T)$  исходя из теоремы классической статистики о равном распределении энергии по степеням свободы. На каждую степень свободы приходится в среднем энергия, равная двум половинкам  $kT$ .

**Формула Рэлей–Джинса**  $f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT$ . Фор-

мула удовлетворяет эксперименту на малых частотах или больших длинах волн (рис. 27.5). Светимость тела при интегрировании по частотам стремится к бесконечности – это **ультрафиолетовая катастрофа**.

Расхождение этой формулы с экспериментом указало на существование закономерностей, несовместимых с классической статистической физикой и электродинамикой. Планк нашел вид функции  $f(\omega, T)$ , соответствующей эксперименту, сделав предположение, противоречащее классической физике. Он допустил, что электромагнитное излучение испускается в виде порций энергии  $\varepsilon$ , **квантов**, величина которых пропор-

циональна частоте излучения  $\varepsilon = \hbar\omega$ . Коэффициент  $\hbar = 1,054 \times 10^{-34}$  Дж·с называется постоянной Планка.

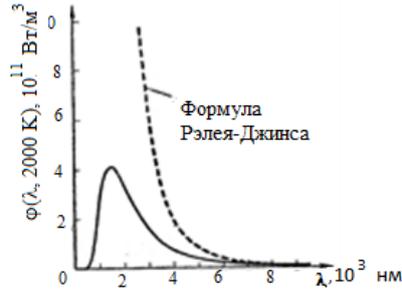


Рис. 27.5

#### *Размерность действия или момента импульса*

Это квант действия. Если излучение испускается порциями  $\hbar\omega$ , то его энергия  $\varepsilon_n$  должна быть кратной этой величине:

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно закону распределения Больцмана вероятность  $P_n$  того, что энергия излучения имеет величину  $\varepsilon_n$ , определяется выражением

$$P_n = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right).$$

Исходя из этого, Планк получил формулу для функции Кирхгофа. **Формула Планка:**

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Эта формула согласуется с экспериментальными данными во всем интервале частот. Она удовлетворяет критерию Вина. При  $\hbar\omega/kT \ll 1$  она переходит в формулу Рэлея-Джинса. Для энергетической светимости абсолютно черного тела получаем формулу

$$R(T) = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} = \sigma T^4.$$

Это закон Стефана–Больцмана. Из этой формулы получается закон смещения Вина. Она полностью описывает равновесное тепловое излучение.

Температуру определяют с помощью яркостных пирометров. Их принцип действия основан на сравнении излучения светящегося тела с излучением абсолютно черного тела. Максимум спектра излучения Солнца приходится на длину волны  $\lambda_m = 0,47$  мкм. Подстановка этого значения в закон Вина дает  $T = \frac{b}{\lambda_m} \approx 6000$  °K. Поверхность Солнца по своим свойствам близка к абсолютно черному телу.

### *Тормозное рентгеновское излучение*

Квантовая природа излучения подтверждается существованием **коротковолновой границы** тормозного рентгеновского излучения. Рентгеновские лучи возникают при бомбардировке быстрыми электронами твердых мишеней (рис. 27.6). Электроны возникают вследствие термоэлектронной эмиссии с катода. Почти вся энергия электронов выделяется на антикатоде в виде тепла, в излучение превращается порядка (1–3)%. Интенсивность излучения при ускорении  $w$  равна

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{e^2 w^2}{6\pi c^2}.$$

Если ускорение за время торможения  $\tau$  остается постоянным, то за это время электрон получит энергию  $W = I\tau \propto \frac{v_0^2}{\tau}$ , где  $v_0$  – начальная скорость электрона. Заметное излучение может наблюдаться лишь при резком торможении быстрых электронов. Согласно классической электро-

динамике, при торможении электрона должны возбуждаться волны всех длин. Чем меньше длина волны, тем меньше поглощаются лучи в веществе. Длина волны максимума излучения уменьшается с ростом скорости электрона, т.е. напряжения на трубке  $U$ . Приведены экспериментальные кривые распределения интенсивности тормозного излучения для различных значений  $U$  (рис. 27.7). Имеется принципиальное отступление от требований классической электродинамики. Кривые обрываются на конечном значении длины волны  $\lambda_{\min}$ . Из эксперимента  $\lambda_{\min} = \frac{12390}{U}$ , где  $\lambda$  в ангстремах,  $U$  в вольтах. Существование коротковолновой границы непосредственно вытекает из квантовой природы излучения. Если излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении, то величина кванта не может превысить энергию электрона  $eU$ :  $\hbar\omega \leq eU$ . Частота не может быть больше  $\omega_{\max} = eU/\hbar$ . Следовательно, длина волны не может быть меньше:

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{eU}.$$

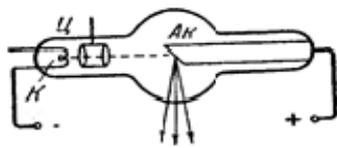


Рис. 27.6

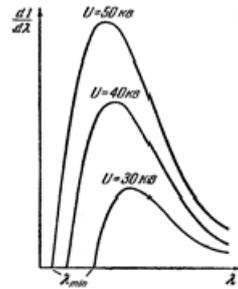


Рис. 27.7

Формула хорошо согласуется с экспериментом. Измерение  $\lambda_{\min}$  дает возможность получить значение постоянной Планка.

## Лекция 28. Квантовые свойства поглощения света. ФОТОНЫ

**Фотоэффектом** называется испускание электронов веществом под действием света. Это явление обнаружил Герц. Закономерности фотоэффекта, полученные Столетовым:

- 1) испускаемые заряды имеют отрицательный знак;
- 2) наибольшее действие оказывают ультрафиолетовые лучи;
- 3) величина заряда пропорциональна поглощенной энергии.

В установке для исследования фотоэффекта свет проникает через кварцевое окошко и освещает катод (рис. 28.1). Испускаемые электроны под действием электрического поля перемещаются к аноду.

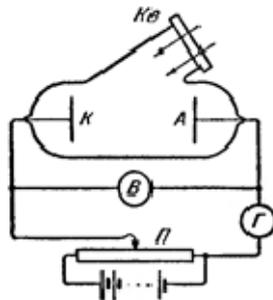


Рис. 28.1

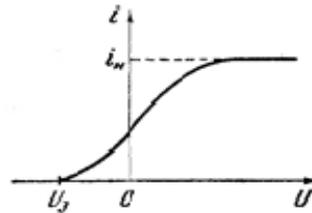


Рис. 28.2

Вольт – амперная характеристика (рис. 28.2), это кривая зависимости фототока  $i$  от напряжения между электродами  $U$  при неизменном потоке света  $\Phi$ . Насыщение – все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. Следовательно, сила тока насыщения  $i_n$  определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света. При разности потенциалов  $U = 0$  фототок не исчезает. Задерживающий потенциал  $U_з$  обращает фото-

ток в нуль. Электрону с наибольшей скоростью  $v_m$  не удается преодолеть задерживающее поле:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_s.$$

**Закон Столетова** – при неизменном спектральном составе света сила тока насыщения пропорциональна световому потоку:

$$i_n \sim \Phi.$$

Задерживающее напряжение от интенсивности света не зависит.

Милликен установил, что при освещении катода монохроматическим светом задерживающее напряжение изменяется с частотой света  $\omega$  по линейному закону (рис. 28.3):

$$U_s = a\omega - \varphi. \quad (28.1)$$

Умножив на  $e$ , получим

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = ae\omega - e\varphi. \quad (28.2)$$

Для того чтобы электроны покинули катод под действием света, необходимо выполнить условие  $a\omega \geq \varphi$  или

$\omega \geq \omega_0 = \frac{\varphi}{a}$ . Для длины волны получаем условие

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{2\pi ca}{\varphi}. \quad (28.3)$$

Частота  $\omega_0$  или длина волны  $\lambda_0$  называется **красной границей** фотоэффекта.

Законы фотоэффекта противоречат волновой природе света. В соответствии с ней скорость электронов пропорциональна амплитуде (интенсивности) света. В действительности скорость зависит от частоты. Эйнштейн объяснил все законы фотоэффекта, предположив, что свет поглощается такими же порциями – квантами  $\hbar\omega$ , какими по предположению Планка он испускается.

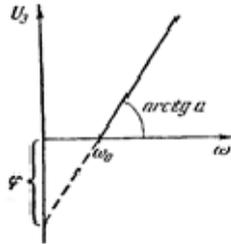


Рис. 28.3

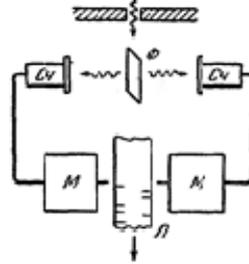


Рис. 28.4

### Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\omega = A + T_{\max} = e\varphi + mv_{\max}^2/2,$$

где  $h\omega$  – энергия фотона, падающего на поверхность металла;  $A = e\varphi$  – работа выхода электрона;  $T_{\max} = mv_{\max}^2/2$  – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона. Эта формула совпадает с эмпирической зависимостью.

**Внутренний фотоэффект** наблюдается в диэлектриках и полупроводниках. Свет перераспределяет электроны по энергетическим уровням. Если энергия кванта превышает ширину запрещенной зоны, то электрон переходит из запрещенной зоны в зону проводимости. В результате появляются носители тока – электрон и дырка. Возникает фотопроводимость. На внутреннем фотоэффекте основано действие фотосопротивления.

**Эйнштейн выдвинул гипотезу**, что свет распространяется в виде дискретных частиц, световых квантов или фотонов.

**Опыт Боте** подтвердил эту гипотезу. Тонкая фольга помещалась между двумя газоразрядными счетчиками. Фольга освещалась слабым пучком рентгеновских лучей. Количество испускаемых фольгой квантов было мало. Если бы излучаемая энергия распространялась равномерно во все стороны, то оба счетчика должны были бы срабатывать одновременно. Наблюдалось беспорядочное расположение меток.

Это экспериментальное доказательство существования особых световых частиц – фотонов. Фотон обладает энергией  $\varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$ , определяемой только его частотой или длиной волны.

**Импульс фотона**  $p = \hbar\omega/c = 2\pi\hbar/\lambda$ ;  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ .

Давление света при нормальном падении на поверхность

$$p = E_e(1 + \rho)/c = w(1 + \rho),$$

где  $E_e$  – энергетическая освещенность (облученность);  $w$  – объемная плотность энергии излучения;  $\rho$  – коэффициент отражения.

### ***Корпускулярно-волновой дуализм***

Вероятность  $dP$  обнаружения фотона в объеме  $dV$ :

$$dP = \chi A^2 dV,$$

где  $A$  – амплитуда световой волны,  $\chi$  – коэффициент пропорциональности.

Величина

$$\frac{dP}{dV} = \chi A^2$$

называется плотностью вероятности. Распределение фотонов по поверхности, на которую падает свет, должно иметь статистический характер.

### ***Эффект Комптона***

Корпускулярные свойства света проявляются при рассеянии рентгеновских лучей в веществе (рис. 28.5). В рассеянных лучах, наряду с излучением первоначальной длины волны  $\lambda$ , содержатся лучи большей длины волны  $\lambda'$ . Разность длин волн оказалась независимой от длины волны и

природы вещества. Экспериментально установлена зависимость

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos \theta) = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

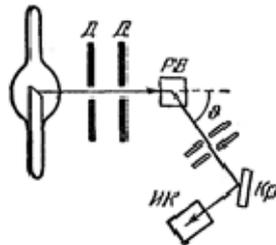


Рис. 28.5

Формула Комптона согласуется с экспериментальной зависимостью, если положить  $\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}$ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} (1 - \cos \theta),$$

где  $\lambda$  – длина волны фотона, встретившегося со свободным или слабосвязанным электроном;  $\lambda'$  – длина волны фотона, рассеянного на угол  $\theta$  после столкновения с электроном;  $m_0$  – масса покоящегося электрона. Величина

$$\Lambda = \hbar/(m_0c) \quad (\Lambda = 2,436 \text{ пм})$$

называется комptonовская длина волны.

### Основные законы

**Закон Кирхгофа.** *Отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же функцией частоты и температуры.*

**Закон Стефана–Больцмана.** *Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.*

**Закон смещения Вина.** *Длина волны, на которую приходится максимум функции спектрального распределения излучения абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его температуре.*

**Формула Рэлея–Джинса.** *Функция Кирхгофа излучения абсолютно черного тела пропорциональна его температуре и квадрату частоты излучения.*

**Формула Планка:** *Зависимость функции Кирхгофа излучения абсолютно черного тела от его частоты и температуры определяется выражением*

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}.$$

**Закон Столетова.** *При неизменном спектральном составе света сила тока насыщения пропорциональна световому потоку.*

**Закон Милликена.** *При освещении катода монохроматическим светом задерживающее напряжение изменяется с частотой света  $\omega$  по линейному закону  $U_3 = a\omega - \varphi$ .*

**Формула Эйнштейна для фотоэффекта**

$$\hbar \omega = A + T_{\max} = e\varphi + mv_{\max}^2 / 2.$$

**Гипотеза Эйнштейна.** *Свет распространяется в виде дискретных частиц, световых квантов или фотонов.*

**Эффект Комптона.** Разность длин волн рассеянного в веществе и падающего на него рентгеновского излучения не зависит от длины волны и природы вещества. Экспериментально установлена зависимость

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos\theta) = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

### Задачи

1. Для вольфрамовой спирали *30-ваттной* лампочки отношение энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при температуре спирали  $2300\text{ K}$  равно  $0,3$ . Определить площадь излучающей поверхности.

2. Считая излучение Солнца близким к излучению абсолютно черного тела, определить мощность лучистой энергии, падающей на  $1$  квадратный метр площадки, перпендикулярной к излучению и находящейся от Солнца на таком же расстоянии, как и Земля. Температуру поверхности Солнца считать равной  $5800\text{ K}$ .

3. Во сколько раз изменилась энергетическая светимость абсолютно черного тела при его нагревании от  $1000$  до  $3000\text{ K}$ ? Насколько при этом изменилась длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости?

4. Лазер на рубине излучает импульс длительностью  $0,3\text{ мс}$  в виде почти параллельного пучка с площадью сечения  $0,7\text{ см}^2$ . Энергия импульса равна  $1\text{ Дж}$ . Коэффициент отражения поверхности равен  $0,7$ . Чему равно давление света на площадку, расположенную перпендикулярно пучку?

5. Стеклоянная колба электрической лампочки отражает  $5\%$  и пропускает  $60\%$  падающего света. Определить световое давление на стенки сферической  $100$ -ваттной лампочки радиусом  $6\text{ см}$ , считая, что вся мощность идет на излучение.

6. Определить уменьшение массы Солнца вследствие излучения за один год. Температуру поверхности Солнца считать равной  $5800\text{ K}$ .

7. Электроны, вылетающие из металла при фотоэффекте, полностью задерживаются разностью потенциалов  $2,8\text{ В}$ . Определить длину волны света, вызывающего фотоэффект,

если известно, что фотоэффект полностью прекращается при частоте света  $5 \cdot 10^{14}$  Гц.

8. Уединенный медный шарик освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны  $0,160$  мкм. Работа выхода для меди равна  $4,5$  эВ. Определить максимальный потенциал, до которого может зарядиться шарик.

9. При каком угле комптоновского рассеяния фотонов имеет место максимальное изменение длины волны?

10. Фотон с энергией  $50$  кэВ в результате комптоновского рассеяния на электроне отклонился на угол  $90^\circ$ . Чему равна энергия рассеянного фотона? (Энергия покоя электрона равна  $511$  кэВ).

---

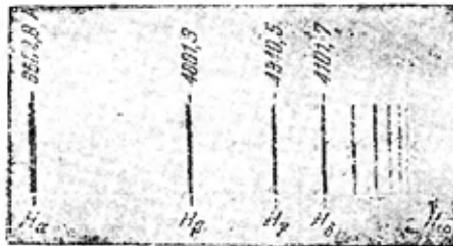
**РАЗДЕЛ 8**  
**КВАНТОВЫЕ И ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА**

---

**Лекция 29. Модели атома**

Изолированные атомы в виде разреженного газа испускают электромагнитное излучение, спектр которого состоит из отдельных спектральных линий (рис. 29.1). Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию строения атома. Вид спектра зависит от рода вещества, агрегатного состояния и других факторов. Наблюдаются три вида спектров – сплошные, линейчатые и полосатые.

Сплошные спектры излучают твердые и жидкие нагретые тела, линейчатые спектры – не взаимодействующие атомы, полосатые спектры – молекулы.



**Рис. 29.1**

Линии в спектрах атомов объединены в группы – серии. Наиболее отчетливо это обнаруживается в спектре атома водорода. Линии располагаются не беспорядочным образом, а в определенном порядке. Расстояние между линиями закономерно убывает по мере перехода от более длинных волн к более коротким.

Бальмер установил, что длины волн линий водорода в видимой части спектра могут быть представлены функцией от целочисленного аргумента:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, 6,$$

где  $\lambda$  – длина волны спектральной линии,  $R$  – постоянная Ридберга: ( $R = 109737,309 \pm 0,012 \text{ см}^{-1}$ ).

**Обобщенная формула Бальмера:**

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Серии Лаймана, Пашена, Брэкета, Пфунда  $m = 1, 3, 4, 5$ .

В физике используют формулу Бальмера для частоты  $\omega = 2\pi c/\lambda$ :

$$\omega = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad R' = 2\pi cR; \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Частоту любой линии водорода можно представить разностью термов  $T(n) = R/n^2$ :

$$\omega = T(m) - T(n).$$

Изучение спектров других атомов показало, что частоты линий и в этом случае могут быть представлены в виде разности двух термов:

$$\omega = T_1(m) - T_2(n).$$

**Модель атома Томсона** – электрон в излучающем атоме совершает гармонические колебания и удерживается около положения равновесия квазиупругой силой  $f = -kr$ . Атом – равномерно заряженная сфера, в которой находится электрон (рис. 29.2). Напряженность поля внутри:

$$E(r) = \frac{e}{R^3} r; \quad 0 \leq r \leq R. \quad (29.1)$$

На электрон действует сила

$$f = (-e)E = -\frac{e^2}{R^3}r = -kr, \quad (29.2)$$

где  $k = \frac{e^2}{R^3}$ . Уравнение движения  $m \frac{d^2r}{dt^2} + kr = 0$ . Колебания с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$ .

Можно получить размер атома

$$R = \left( \frac{e^2}{m\omega^2} \right)^{1/3} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ м} = 3 \text{ \AA}.$$

Полученное значение совпадает по порядку величины с газокинетическими размерами атомов, что можно рассматривать как подтверждение модели Томсона. Однако модель оказалась несостоятельной.



Рис. 29.2

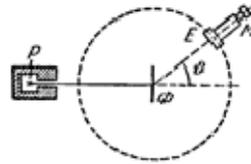


Рис. 29.3

### *Ядерная модель атома*

Для выяснения распределения положительных и отрицательных зарядов в атоме Резерфорд зондировал его  $\alpha$ -частицами с энергией в несколько МэВ. Внутри свинцовой полости помещалось радиоактивное вещество, служившее источником  $\alpha$ -частиц (рис. 29.3). На пути узкого пучка частиц располагалась тонкая металлическая фольга. Рассеянные частицы ударялись об экран, покрытый сернистым цинком, наблюдаемые при этом вспышки рассматривались в микроскоп. Оказалось, что некоторое количество частиц рас-

сеивается на большие углы. Это возможно в случае наличия в центре атома сильного электрического поля, которое создается зарядом, связанным с большой массой и сконцентрированным в очень малом объеме. Согласно ядерной модели Резерфорда атом представляет собой систему зарядов, в центре которой расположено тяжелое положительное ядро с зарядом  $Ze$ , имеющее размеры, не превышающие  $10^{-12}$  см. Вокруг ядра расположены  $Z$  электронов. Почти вся масса атома сосредоточена в ядре.

Исходя из таких предположений Резерфорд разработал количественную теорию рассеяния  $\alpha$ -частиц. Когда частица пролетает вблизи ядра, на нее действует **кулоновская сила отталкивания**

$f = \frac{2Ze^2}{r^2}$ . **Формула Резерфорда:**

$$\frac{dN_\theta}{N} = nd \left( \frac{Ze^2}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (29.3)$$

где  $n$  – число атомов в единице объема,  $d$  – толщина фольги.

В отличие от модели Томсона  $\alpha$ -частица не проникает в область положительного заряда. Расстояние, на которое частица подходит к ядру, определяется из условия равенства кинетической энергии и потенциальной энергии ее взаимодействия с ядром:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2Ze^2}{r}. \quad (29.4)$$

Из этого равенства получаем  $r = \frac{4Ze^2}{mv^2} \approx 1,5 \times 10^{-12}$  см.

Результаты опытов по рассеянию свидетельствуют в пользу ядерной модели атома Резерфорда. Однако ядерная модель противоречит классической механике и электродинамике. Покоящиеся заряды не могут находиться в равновесии. А движущиеся заряды излучают и падают на ядро.

### Модель атома Бора

Нильс Бор ввел постулаты, противоречащие классической физике и электродинамике. Эти постулаты соответствовали экспериментам.

1. Из бесконечного множества орбит осуществляются те, которые удовлетворяют определенным квантовым условиям. Электрон на них не излучает электромагнитных волн.

2. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта  $\hbar\omega$  при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. Величина кванта равна разности энергий стационарных состояний:

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \quad (29.5)$$

Частота излучаемой линии равна

$$\omega = \frac{E_n}{\hbar} - \frac{E_m}{\hbar}. \quad (29.6)$$

Положительной величиной является  $(-E_i/\hbar)$ . Следовательно:

$$\omega = \left(-\frac{E_n}{\hbar}\right) - \left(-\frac{E_m}{\hbar}\right). \quad (29.7)$$

Из спектроскопии известно, что

$$\omega = T(m) - T(n). \quad (29.8)$$

Сравнивая, получаем

$$T(\omega) = -\frac{E_n}{\hbar} > 0. \quad (29.9)$$

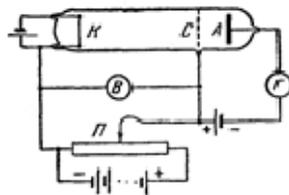


Рис. 29.4

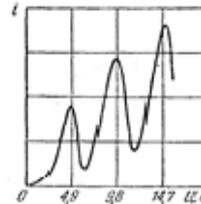


Рис. 29.5

Существование дискретных энергетических уровней подтверждено опытами **Франка и Герца**. В трубке, заполненной парами ртути, имелись три электрода: катод, сетка и анод (рис. 29.4). Между сеткой и анодом создавалось слабое электрическое поле, тормозящее движение электронов к аноду. Определялась зависимость силы тока в цепи анода от напряжения. Максимумы силы тока возникали при напряжениях  $U = 4,9; 9,8; 14,7 \text{ В}$  (рис. 29.5). Ход кривой объясняется тем, что вследствие дискретности энергетических уровней атомы могут воспринимать энергию только определенными порциями:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1; \quad \Delta E_2 = E_3 - E_1. \quad (29.10)$$

Эти опыты непосредственно обнаруживают существование у атомов дискретных энергетических уровней.

Из модели Бора следует, что на стационарных орбитах **момент импульса** электрона равен целому кратному постоянной Планка.

$$L_n = \hbar n, \text{ или } m v_n r_n = \hbar n, \quad (29.11)$$

где  $m$  – масса электрона;  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  – радиус  $n$ -й стационарной орбиты;  $\hbar$  – постоянная Планка;  $n$  – главное квантовое число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Из второго закона Ньютона следует, что

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{Z e^2}{r^2}. \quad (29.12)$$

Исключая  $v$ , получим радиусы орбит:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m Z e^2} n^2. \quad (29.13)$$

Водород ( $Z = 1, n = 1$ ), радиус первой орбиты

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0,529 \text{ \AA}. \quad (29.14)$$

Радиус  $n$ -й стационарной орбиты

$$r_n = r_1 n^2. \quad (29.15)$$

Внутренняя энергия атома – кинетическая энергия электрона и энергия взаимодействия электрона с ядром

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}. \quad (29.16)$$

Из уравнения движения

$$m \frac{v^2}{2} = \frac{Ze^2}{2r} \quad (29.17)$$

получаем

$$E = \frac{Ze^2}{2r} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}. \quad (29.18)$$

Подставляя  $r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2$ , получим

$$E_n = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}; \quad E_n = E_i/n^2, \quad (29.19)$$

где  $E_i = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}$  – энергия ионизации атома водорода. На рис. 29.6 изображена схема энергетических уровней в соответствии с приведенной формулой. При переходе атома из  $n$  в состояние  $m$  излучается квант  $\varepsilon = \hbar\omega = E_n - E_m$



—  $E_1$

Рис. 29.6

$$\hbar\omega = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (29.20)$$

Частота испущенного света равна

$$\omega = \frac{me^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (29.21)$$

Это обобщенная формула Бальмера.

Спектроскопическое волновое число

$$1/\lambda = R \left( 1/m^2 - 1/n^2 \right), \quad (29.22)$$

где  $\lambda$  – длина волны излучения или поглощения атомом;  
 $R$  – постоянная Ридберга.

Несмотря на совпадения с экспериментом, в этой теории есть внутренние противоречия. Она опиралась на классическую физику и была противоречивой.

### Лекция 30. Волновые свойства частиц

Противоречивость модели атома Бора привела к необходимости критического пересмотра представлений о природе элементарных частиц. Возник вопрос о том, можно ли представлять электрон в виде малой механической частицы, характеризуемой определенными координатами и определенной скоростью. Развитие исследований оптических явлений показало существование определенного дуализма. Наряду с волновыми свойствами света, такими как интерференция и дифракция, имеются и другие свойства, обнаруживающие его корпускулярную природу, такие как фотоэффект и эффект Комптона.

**Гипотеза Луи де Бройля** – дуализм не является особенностью одних только оптических явлений, но имеет универсальное значение. Допуская, что частицы вещества наряду с корпускулярными свойствами имеют также и волновые свойства, Луи де Бройль перенес на случай частиц вещества те же правила перехода от одной картины к другой, какие справедливы в случае света. Фотон имеет энергию и импульс:

$$E = \hbar\omega; \quad p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Движение электрона связано с волновым процессом. Его длина волны и частота определяются формулами

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}; \quad \omega = \frac{E}{\hbar}.$$

**Длина волны де Бройля** –  $\lambda = 2\pi\hbar/p$ , где  $p$  – импульс частицы.

Опыт подтвердил эту гипотезу. **Дэвиссон и Джермер** – обнаружили дифракционную картину при рассеянии электронов от кристаллической пластинки. **Томсон** получил дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу (рис. 30.1). Электроны попада-

ли на фотопластинку. Электрон при ударе о фотопластинку оказывает на нее такое же действие, как и фотон. Полученная таким способом электронограмма золота сопоставлена с рентгенограммой алюминия (рис. 30.2). Сопоставление показало сходство полученных дифракционных картин.

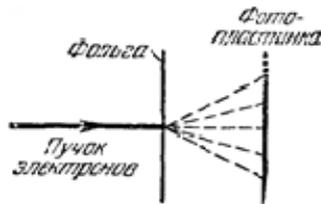


Рис. 30.1

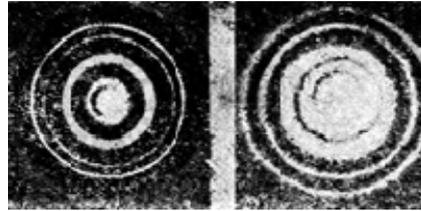


Рис. 30.2

**Штерн** показал, что дифракционная картина обнаруживается на атомных и молекулярных пучках. Пучок микро-частиц определенной скорости и направления дает дифракционную картину, подобную картине, получаемой от плоской волны. Обнаружение волновых свойств частиц свидетельствует о том, что классическая механика не может правильно описывать поведение подобных частиц.

Механика, учитывающая волновые свойства частиц, называется **волновая или квантовая механика**. Состояние частиц описывается волновой функцией  $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ , которая зависит от координат и времени. Соотношение между волновой функцией  $\Psi$  и описываемой ею частицей аналогично соотношению между световой волной и фотоном. Квадрат амплитуды световой волны определяет вероятность попадания фотона в соответствующую точку пространства. Аналогично квадрат модуля волновой функции для какой-либо точки пространства, умноженный на объем  $dV$ , определяет вероятность  $dP$  того, что частица будет обнаружена в элементе объема  $dV$ :

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi\Psi^* dV.$$

**Физический смысл волновой функции** заключается в том, что квадрат ее модуля дает плотность вероятности нахождения частицы в соответствующем месте пространства.

Квантовая механика имеет **статистический характер**. Она не позволяет определить местонахождение частицы в пространстве или траекторию, по которой она движется. С помощью волновой функции можно лишь предсказать вероятность обнаружения частицы в различных точках пространства. Квантовая механика гораздо глубже, чем классическая, вскрывает истинное поведение микрочастиц. Она не определяет того, чего нет на самом деле. В применении к микрочастицам понятия определенного местоположения и траектории вообще теряют смысл. Движение по определенной траектории несовместимо с волновыми свойствами, что становится совершенно очевидным, если проанализировать существо опытов по дифракции.

Рассмотрим дифракцию от двух близко расположенных отверстий (рис. 30.3). Вследствие интерференции волн, распространяющихся от отверстий, дифракционная картина не будет тождественна наложению дифракционных картин, получающихся от каждого из отверстий в отдельности. Следовательно, вероятность попадания электрона в различные точки экрана при прохождении пучка через оба отверстия также не будет равна сумме вероятностей для случаев прохождения пучка через каждое из отверстий в отдельности. На характер движения каждого электрона оказывают влияние оба отверстия. Такой вывод не совместим с представлением о траекториях. Если бы электрон в каждый момент времени находился в определенной точке пространства и двигался по траектории, он проходил бы через определенное отверстие. Явление ди-



Рис. 30.3

фракции доказывает, что в прохождении каждого электрона участвуют оба отверстия, как первое, так и второе.

Однако электрон всегда обнаруживается как целое, с присущей ему массой, зарядом и другими характерными для него величинами. Таким образом, электрон обладает своеобразными свойствами. Макроскопическая частица очень малых размеров не может служить моделью микрочастицы. С уменьшением размеров начинают проявляться качественно новые свойства, не обнаруживающиеся у макроскопических частиц.

Понятия траектории и определенного местоположения оказываются применимыми к микрочастицам, но только с некоторой степенью точности. Такое положение оказывается аналогичным, как и в оптике. Степень точности, с какой к частице может быть применено представление об определенном положении ее в пространстве, дается соотношением неопределенностей, установленным Гейзенбергом.

**Соотношение неопределенностей Гейзенберга:**

а) Частица не может иметь определенные значения координат и импульса:

$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$  (для координаты и импульса), где  $\Delta p_x$  – неопределенность проекции импульса на ось  $x$ ;  $\Delta x$  – неопределенность координаты;

б)  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$  (для энергии и времени), где  $\Delta E$  – неопределенность энергии;  $\Delta t$  – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Согласно этим соотношениям частица не может иметь одновременно вполне точные значения, например, координаты  $x$  и соответствующей этой координате составляющей импульса  $p_x$ . Чем точнее определена одна из величин,  $x$  или  $p_x$ , тем больше становится неопределенность другой. Возможны состояния частицы, при которых одна из величин имеет вполне точное значение, но тогда вторая величина будет совершенно неопределенной.

Чтобы пояснить соотношение неопределенностей, рассмотрим следующий пример. Для определения положения свободно летящей микрочастицы поставим на ее пути щель шириной  $\Delta x$ , расположенную перпендикулярно к направлению движения частицы (рис. 30.4). До прохождения частицы через щель составляющая ее импульса  $p_x$  имеет точное значение, равное нулю, следовательно,  $\Delta p_x = 0$ . При этом координата  $x$  частицы является совершенно неопределенной. В момент прохождения частицы через щель положение меняется. Вместо полной неопределенности координаты  $x$  появляется неопределенность  $\Delta x$ . Это достигается ценой утраты определенности значения  $p_x$ . Действительно, вследствие дифракции имеется некоторая вероятность того, что частица будет двигаться в пределах угла  $2\varphi$ , где угол  $\varphi$  соответствует первому дифракционному минимуму. Таким образом, появляется неопределенность

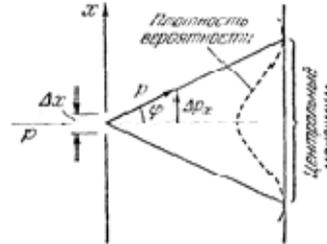


Рис. 30.4

$$\Delta p_x = p \sin \varphi.$$

К краю центрального дифракционного максимума (первому минимуму), получающегося при дифракции от щели шириной  $\Delta x$  соответствует угол  $\varphi$ , для которого выполняется равенство

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

Следовательно, имеем

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = p \lambda = 2\pi \hbar.$$

Соотношение неопределенностей отражает двойственную корпускулярно-волновую природу микрочастиц. Одного этого соотношения достаточно, чтобы получить ряд важных

результатов. В частности, оно позволяет объяснить тот факт, что электрон не падает на ядро атома, а также оценить размеры простейшего атома и минимальную возможную энергию электрона в таком атоме.

Если бы электрон упал на точечное ядро, его координаты и импульс приняли бы определенные (нулевые) значения, что несовместимо с принципом неопределенности. Этот принцип требует, чтобы неопределенность координаты электрона  $\Delta r$  и неопределенность импульса  $\Delta p$  были связаны условием  $\Delta p \cdot \Delta r \geq \hbar$ . Формально энергия была бы минимальна при  $r = 0$  и  $p = 0$ . Поэтому для оценки наименьшей возможной энергии нужно положить  $\Delta r \approx r$ ,  $\Delta p \approx p$ . Воспользовавшись соотношением неопределенности, получим

$$rp = \hbar. \quad (30.1)$$

Энергия электрона в атоме водорода равна

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \quad (30.2)$$

Заменив в этой формуле  $p = \hbar/r$ , получим

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}. \quad (30.3)$$

Найдем значение  $r$ , при котором энергия атома  $E$  минимальна. Продифференцировав функцию  $E(r)$  по  $r$  и приравняв производную нулю, приходим к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0, \quad (30.4)$$

откуда следует, что

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (30.5)$$

Полученное значение совпадает с радиусом первой боровской орбиты атома водорода.

Энергию основного состояния можно найти, подставив полученное значение  $r$  :

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{me^2}{\hbar^2} \right)^2 - e^2 \frac{me^2}{\hbar^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (30.6)$$

Найденное значение совпадает с энергией первого уровня модели атома Бора для  $Z = 1$ .

### Лекция 31. Квантовая механика частиц

Исходным уравнением квантовой механики является **уравнение Шредингера**, которое определяет функцию  $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Его справедливость доказывается тем, что вытекающие следствия согласуются с опытными фактами. Потенциальная энергия  $U = U(\mathbf{r}, t)$  есть функция координат и времени. Решение уравнения определяется видом этой функции или, другими словами, характером сил, действующих на частицу. В уравнении обозначено:  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  – масса частицы,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

Для стационарного силового поля  $U = U(\mathbf{r})$  волновая функция распадается на два сомножителя:

$$\Psi(x, y, z, t) = \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \psi(x, y, z).$$

**Уравнение Шредингера** для стационарных состояний

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Значение уравнения Шредингера не исчерпывается тем, что с его помощью можно найти вероятность нахождения частицы в различных точках пространства. Из этого уравнения и граничных условий, налагаемых на волновую функцию, непосредственно вытекают правила квантования энергии. Волновая функция  $\psi$ , в соответствии с ее физическим смыслом, должна быть однозначной, конечной и непрерывной во всей области изменения переменных  $(x, y, z)$ . В уравнение Шредингера входит в качестве параметра полная энер-

гия частицы  $E$ . Подобные уравнения имеют решения, удовлетворяющие условиям однозначности, конечности и непрерывности, не при любых значениях параметра  $E$ , а лишь при некоторых избранных значениях. Следовательно, решение уравнения возможно лишь при определенных значениях энергии частицы. Эти значения называются **собственными значениями** энергии, а соответствующие им решения – **собственными функциями**. Волновая функция нормирована на единицу  $\int \psi \psi^* dV = 1$ . Это означает, что вероятность обнаружить частицу во всем пространстве есть достоверность.

***Частица в бесконечно глубокой  
одномерной потенциальной яме***

Квантовые свойства частицы рассмотрим на конкретном примере решения уравнения Шредингера. Исследуем поведение частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Предположим, что частица может двигаться только вдоль оси  $x$ . Пусть движение ограничено непроницаемыми для частицы стенками  $x = 0$ ,  $x = l$ . Потенциальная энергия  $U$  в этом случае равна нулю при  $0 \leq x \leq l$  и обращается в бесконечность при  $x < 0$  и  $x > l$ . Поскольку функция  $\psi$  зависит только от одной координаты  $x$ , уравнение Шредингера будет иметь вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где  $\psi(x)$  – волновая функция, описывающая состояние частицы;  $m$  – масса частицы;  $E$  – полная энергия;  $U = U(x)$  – потенциальная энергия частицы.

Плотность вероятности

$$\frac{dw(x)}{dx} = |\psi(x)|^2,$$

где  $d w(x)$  – вероятность того, что частица может быть обнаружена вблизи точки с координатой  $x$  на участке  $dx$ . Вероятность обнаружения частицы в интервале от 0 до  $l$  равна

$$w = \int_0^l |\psi(x)|^2 dx .$$

За пределы потенциальной ямы частица попасть не может. Поэтому вероятность обнаружить частицу вне потенциальной ямы равна нулю,  $\psi = 0$ . Из непрерывности функции следует, что на границах потенциальной ямы функция равна нулю:

$$\psi(0) = 0; \quad \psi(l) = 0 .$$

Внутри потенциальной ямы  $U = 0$ . Следовательно, уравнение Шредингера в этой области имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 . \quad (31.1)$$

Обозначив  $\frac{2mE}{\hbar^2} = \omega^2$ , получим уравнение, аналогичное уравнению колебаний:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \omega^2 \psi = 0 . \quad (31.2)$$

Его решение имеет вид

$$\psi(x) = a \sin(\omega x + \alpha) . \quad (31.3)$$

Граничным условиям можно удовлетворить с помощью выбора  $a$  и  $\alpha$ . Прежде всего, из условия  $\psi(0) = 0$  получаем

$$\psi(0) = a \sin(\alpha) = 0 , \quad (31.4)$$

откуда следует, что  $\alpha$  должна быть равна нулю. Далее, должно выполняться условие  $\psi(l) = 0$ :

$$\psi(l) = a \sin(\omega l) = 0 . \quad (31.5)$$

Это возможно при условии  $\omega l = \pm n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Решения уравнения будут иметь физический смысл не при

всех значениях энергии  $E$ , а лишь при значениях, удовлетворяющих соотношению

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_n = \frac{\pi^2}{l^2} n^2. \quad (31.6)$$

Это равенство означает условие квантования энергии частицы. Из него определяются собственные значения этой энергии:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2; \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (31.7)$$

Схема энергетических уровней изображена на рис. 31.1. Произведем оценку расстояний между соседними уровнями для различных значений массы частицы  $m$  и ширины ямы  $l$ . Разность энергий двух соседних уровней равна

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \quad (31.8)$$

Если положить массу молекулы  $m \approx 10^{-23}$  э, а  $l \approx 10$  см, то получим  $\Delta E \approx 10^{-32}$  эрг. Густые линии воспринимаются как сплошной спектр. Хотя квантование энергии в принципе будет иметь место, но на характере движения молекул сказываться не будет.

Аналогичный результат получается, если взять  $m$  порядка массы электрона ( $\sim 10^{-27}$  э) при тех же размерах ямы (свободные электроны в металле). В этом случае  $\Delta E_n \approx 10^{-28} n$  эрг  $\approx 10^{-16}$  эВ.

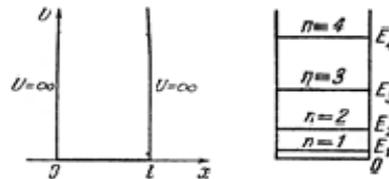


Рис. 31.1

Однако совсем иной результат получается для электрона, если область, в пределах которой он движется, будет

порядка атомных размеров ( $\sim 10^{-8}$  см). В этом случае  $\Delta E_n \approx 10^{-10} n \text{ эрг} \approx 10^2 \text{ эВ}$ . Очевидно, что в этом случае дискретность энергетических уровней будет проявляться весьма заметным образом.

Собственными функциями, как следует из полученного условия для функции  $\psi$ , будут

$$\psi_n(x) = a \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (31.9)$$

Для нахождения коэффициента  $a$  воспользуемся условием нормировки, которое в данном случае запишем следующим образом:

$$a^2 \int_0^l \sin^2 \left( \frac{\pi n}{l} x \right) dx = 1. \quad (31.10)$$

Воспользовавшись значением интеграла, получим

$$a^2 (1/2)l = 1. \quad (31.11)$$

Таким образом, собственные функции имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (31.12)$$

На рис. 31.2 представлены собственные функции (слева) и плотность вероятности обнаружения частицы в различных местах потенциальной ямы. Частица в состоянии, например, с номером  $n = 2$  не может быть обнаружена в середине ямы. Она одинаково часто бывает как в левой, так и в правой половине ямы. Такое поведение частицы не совместимо с представлением о траекториях. Согласно классическим представлениям все положения частицы в яме равновероятны.

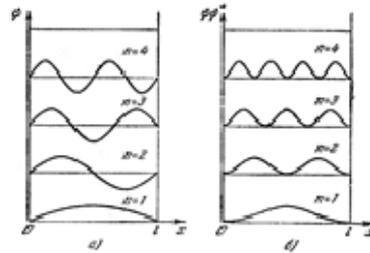


Рис. 31.2

### Прохождение частиц через потенциальный барьер

Частица движется слева направо через барьер высоты  $U_0$  (рис. 31.3). По классическим представлениям поведение частицы имеет следующий характер. Если энергия частицы больше высоты барьера ( $E > U_0$ ), частица беспрепятственно проходит над барьером. Если  $E$  меньше  $U_0$ , то частица отражается от барьера и летит в обратную сторону. Сквозь барьер частица проникнуть не может.

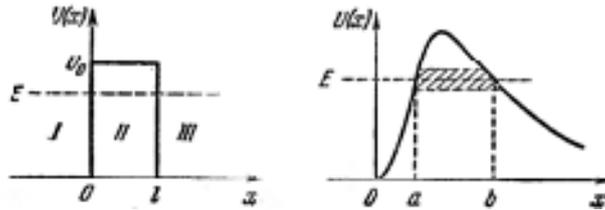


Рис. 31.3

Согласно квантовой механике даже при  $E > U_0$  имеется отличная от нуля вероятность того, что частица отразится от барьера и полетит в обратную сторону. При  $E < U_0$  имеется отличная от нуля вероятность того, что частица проникнет сквозь барьер и окажется в области  $x > l$ . Такое поведение микрочастицы вытекает непосредственно из уравнения Шредингера. Отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны называется **коэффициентом прохождения**  $D$ . В случае потенциального барьера произвольной формы коэффициент прохождения можно рассчитать по формуле

$$D \approx \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U-E)} dx \right].$$

При преодолении потенциального барьера частица проходит как бы через туннель в этом барьере. Такое явление называется **туннельным эффектом**.

### Лекция 32. Атом водорода

В атоме водорода или водородоподобном ионе потенциальная энергия электрона равна

$$U = -\frac{Ze^2}{r},$$

где  $Ze$  – заряд ядра,  $r$  – расстояние между ядром и электроном.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0.$$

Поле является центрально-симметричным. Воспользуемся сферической системой координат  $r, \theta, \varphi$ . Уравнение имеет однозначные, конечные и непрерывные решения в следующих случаях:

- 1) при любых положительных значениях  $E$ ;
- 2) при дискретных отрицательных значениях энергии,

равных  $E_n = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$ .

Случай  $E > 0$  соответствует электрону, пролетающему на бесконечность вблизи ядра. Случай  $E < 0$  соответствует электрону в атоме. Значение энергии совпадает с моделью Бора, однако оно получено из уравнения, а не из постулата.

Собственные функции уравнения содержат три целочисленных параметра. Один из них совпадает с номером уровня энергии  $n$ , два других принято обозначать буквами  $l, m$ . Эти числа называют **квантовыми**.

- $n$  – **главное** квантовое число;
- $l$  – **азимутальное** квантовое число;
- $m$  – **магнитное** квантовое число.

При данном значении  $n$  числа  $l$  могут принимать следующие  $n$  значений:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

а числа  $m$  принимают  $2l+1$  различных значений

$$m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l.$$

Каждому значению  $E_n$  соответствуют несколько волновых функций  $\psi_{nlm}$ , отличающихся значениями квантовых чисел  $l, m$ . Атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких различных состояниях.

Состояния с одинаковой энергией называются **вырожденными**, а их число называется **кратностью вырождения**.

Число различных состояний, соответствующих данному значению  $n$ , равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Главное квантовое число  $n$  определяет энергию состояния электрона в атоме, азимутальное квантовое число  $l$  определяет величину момента импульса электрона в атоме, магнитное квантовое число  $m$  определяет величину проекции момента импульса на заданное направление в пространстве (например, магнитное или электрическое поле).

Момент импульса равен  $M = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ .

Проекция момента на заданное направление равна  $M_z = m\hbar$ .

*Обозначения для состояний с различными значениями азимутального квантового числа  $l$*

Электрон со значением  $l = 0$  называется  $s$  электроном,  $l = 1$  называется  $p$  электроном, далее  $d$  электроном,  $f$  электроном и т.д. Возможны следующие состояния электрона:

$$\begin{aligned}
 &1s, \\
 &2s, 2p, \\
 &3s, 3p, 3d \quad \text{и т.д.} \\
 &4s, 4p, 4d, 4f
 \end{aligned}$$

Схему уровней изображают: по вертикали откладывают  $n$ , а по горизонтали  $l$  (рис. 32.1). Возможны переходы, при которых квантовое число  $l$  изменяется на единицу.

Испускание и поглощение света происходит при переходе электрона с одного уровня на другой. Возможны только такие переходы, при которых квантовое число  $l$  изменяется на единицу.

**Правило отбора:**  $\Delta l = \pm 1$ . Фотон приносит или уносит момент импульса, равный  $\hbar$ .

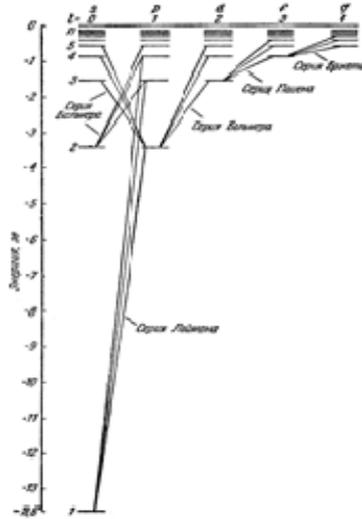


Рис. 32.1

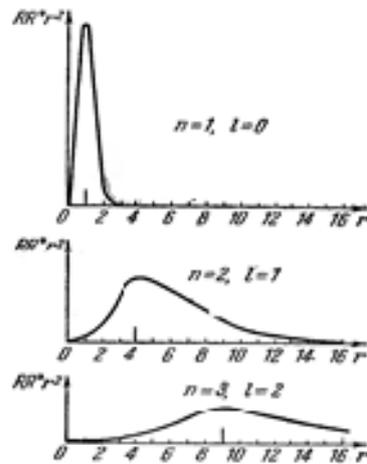


Рис. 32.2

Собственные функции  $s$  состояний (т.е. со значением  $l = 0$ ) не зависят от углов. Следовательно,  $\psi_{n00} = R_n(r)$ . Вероятность найти электрон в тонком шаровом слое равна

$$dP_r = \psi\psi^* dV = R_n(r)R_n^*(r)4\pi r^2 dr.$$

Выражение  $R_n(r)R_n^*(r)4\pi r^2$  представляет собой плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии  $r$  от ядра. Радиусы орбит в модели атома Бора совпадают с наиболее вероятными расстояниями электрона от ядра (рис. 32.2).

Величина собственного момента импульса электрона определяется **спиновым квантовым числом**  $s$ , равным  $1/2$ :

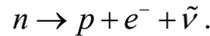
$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = 1/2\hbar\sqrt{3}.$$

Проекция собственного момента импульса  $M_{sz} = m_s\hbar$ ;  $m_s = \pm s = \pm 1/2$ .

**Принцип Паули** – в одном и том же атоме не может быть двух электронов, обладающих одинаковой совокупностью четырех квантовых чисел  $n, l, m, m_s$ . Принцип Паули дает объяснение периодической повторяемости свойств атомов.

### Лекция 33. Состав атомного ядра и ядерные реакции

Ядра атомов состоят из двух видов элементарных частиц – протонов и нейтронов. Это нуклоны. Масса выражается в единицах энергии умножением на  $c^2$ . Атомная единица массы (а.е.м.) =  $1,66 \times 10^{-24} \text{ г} = 931 \text{ МэВ}$ . Масса протона  $m_p = 938,2 \text{ МэВ}$ , заряд  $+e$ . Масса нейтрона  $m_n = 939,5 \text{ МэВ}$ . В свободном состоянии нейтрон нестабилен (радиоактивен) – он самопроизвольно распадается, превращаясь в протон и испуская электрон:



Масса электрона  $m_e = 0,511 \text{ МэВ}$ . Разность масс нейтрона и протона  $m_n - m_p = 1,3 \text{ МэВ} = 2,5 m_e$ . При распаде масса нейтрона превышает массу получившихся частиц на величину  $1,5 m_e = 0,77 \text{ МэВ}$ , которая выделяется в виде кинетической энергии образующихся частиц.

Массовое число ядра (число нуклонов в ядре)

$$A = Z + N,$$

где  $Z$  – зарядовое число (число протонов) называется атомным номером, который определяет порядковый номер химического элемента в периодической таблице Менделеева;  $N$  – число нейтронов.

Обозначения ядер  ${}_Z X^A$ .

Большинство химических элементов имеют разновидности:

1. **Изотопы** – отличаются значениями массового числа  $A$ .

Например, водород имеет три изотопа:

Протий  ${}_1 H^1$  ( $Z = 1, N = 0$ ),

Дейтерий  ${}_1 H^2$  ( $Z = 1, N = 1$ ),

Тритий  ${}_1 H^3$  ( $Z = 1, N = 2$ )

У кислорода два стабильных изотопа  ${}_8O^{16}$ ,  ${}_8O^{17}$ .

2. **Изобары** – ядра с одинаковым массовым числом  $A$ .

Пример:  ${}_{18}Ar^{40}$ ,  ${}_{20}Ca^{40}$ .

3. **Изотоны** – ядра с одинаковым числом нейтронов  $N = A - Z$ .

Пример:  ${}_6C^{13}$ ,  ${}_7N^{14}$ .

4. **Изомеры** – ядра с одинаковыми  $Z$  и  $A$ , отличающиеся периодом полураспада.

Пример: два изомера ядра  ${}_{35}Br^{80}$  с периодами полураспада 18 мин и 4,4 ч.

**Радиус ядра** определяется формулой  $r = 1,3 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{ см} = 1/3 A^{1/3} \text{ ферми}$ . Объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре.

### *Масса и энергия связи ядра*

Масса ядра всегда меньше суммы масс входящих в него частиц. При объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов друг с другом. Энергия связи равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на такие расстояния, при которых они практически не взаимодействуют друг с другом. Уменьшение энергии тела на величину  $\Delta E$  должно сопровождаться эквивалентным уменьшением массы тела на  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Следовательно, энергия связи нуклонов в ядре равна

$$E_{св} = c^2 \left\{ \left[ Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_{\text{я}} \right\}. \quad (33.1)$$

Пренебрегая энергией связи электронов, можно записать

$$E_{св} = c^2 \left\{ \left[ Zm_H + (A - Z)m_n \right] - m_a \right\}. \quad (33.2)$$

Пример: энергия связи в ядре  ${}^4_2\text{He}$ . Его масса равна 4,00260 а.е.м. что соответствует 3728,0 МэВ. Масса атома водорода равна 938,7 МэВ. Подставляя, получим

$$E_{св} = [2 \times 938,7 + 2 \times 939,5] - 3728,0 = 28,4 \text{ МэВ}. \quad (33.3)$$

Ядерное взаимодействие между нуклонами называется **сильным взаимодействием**.

Сильное взаимодействие обусловлено тем, что нуклоны виртуально обмениваются мезонами.

### ***Радиоактивность***

Радиоактивностью называют самопроизвольное превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием элементарных частиц или ядер. К числу основных таких превращений относятся:

- 1)  $\alpha$  -распад;
- 2)  $\beta$  -распад;
- 3) протонная радиоактивность;
- 4) спонтанное деление тяжелых ядер.

Радиоактивность, наблюдающаяся у изотопов, существующих в природных условиях, называется естественной. Радиоактивность изотопов, полученных посредством ядерных реакций, – искусственной. Между искусственной и естественной радиоактивностью нет принципиального различия. Процесс радиоактивного превращения в обоих случаях подчиняется одинаковым законам.

### **Закон радиоактивного распада**

$$dN = -\lambda N dt, \text{ или } N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

где  $dN$  – число ядер, распадающихся за интервал времени  $dt$ ;  $N$  – число ядер, не распавшихся к моменту времени  $t$ ;

$N_0$  – число ядер в начальный момент ( $t = 0$ );  $\lambda$  – постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время  $t$ :

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 [1 - \exp(-\lambda t)].$$

В случае если интервал времени  $\Delta t$ , за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада  $T_{1/2}$ , то число распавшихся ядер можно определить по формуле

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

Зависимость периода полураспада от постоянной радиоактивного распада:

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda = 0,693 / \lambda.$$

Среднее время  $\tau$  жизни радиоактивного ядра, т.е. интервал времени, за который число не распавшихся ядер уменьшается в  $e$  раз,

$$\tau = 1 / \lambda.$$

Число  $N$  атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе:

$$N = m N_A / M,$$

где  $m$  – масса изотопа;  $M$  – молярная масса;  $N_A$  – постоянная Авогадро.

Активность  $A$  радиоактивного изотопа:

$$A = -dN/dt = -\lambda N, \text{ или } A = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) = A_0 \exp(-\lambda t),$$

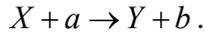
где  $dN$  – число ядер, распадающихся за интервал времени  $dt$ ;  $A_0$  – активность изотопа в начальный момент времени.

Удельная активность изотопа

$$\alpha = A/m.$$

### Ядерные реакции

Ядерной реакцией называется процесс интенсивного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра:



Они сопровождаются как выделением, так и поглощением энергии.

Медленные частицы реагируют в два этапа. Первый этап – захват частицы и образование составного ядра с перераспределением энергии между всеми нуклонами. Ядро находится в возбужденном состоянии. На втором этапе составное ядро испускает частицу. Если  $b \equiv a$ , то это рассеяние. Упругое  $E_b = E_a$ , неупругое  $E_b \neq E_a$ . Если  $b \neq a$ , то это реакция. Быстрые частицы – прямое ядерное взаимодействие.

Взаимодействие характеризуется эффективным сечением  $\sigma$ . Тонкая мишень имеет толщину  $\delta$ . Вероятность столкновения равна  $P = \sigma n \delta$ . Определяет относительную долю площади мишени, перекрытую ядрами.

Если плотность падающих частиц  $N$ , то число столкнувшихся частиц  $\Delta N$  равно

$$\Delta N = NP = N\sigma n \delta . \quad (33.4)$$

Сечение можно определить по формуле  $\sigma = \frac{\Delta N}{Nn\delta}$ .

Толстая мишень. Для слоя на глубине  $x$  имеем

$$dN = -N(x)\sigma n dx . \quad (33.5)$$

Получим  $N(\delta) = N_0 \exp(-\sigma n \delta)$ . Сечение определяется

по формуле  $\sigma = \frac{1}{n\delta} \ln \frac{N_0}{N(\delta)}$ .

Первая ядерная реакция (Резерфорд)  
 ${}_7N^{14} + \alpha = {}_8O^{17} + p .$

Деление ядер. Наиболее вероятным является деление на осколки, массы которых относятся как 2:3.

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}},$$

где  $Z$  – зарядовое число (число протонов в ядре);  $A$  – массовое число (число нуклонов в ядре);  $(A - Z)$  – число нейтронов в ядре;  $m_p$  – масса протона;  $m_n$  – масса нейтрона;  $m_{\text{я}}$  – масса ядра.

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2,$$

где  $\Delta m$  – дефект массы ядра;  $c$  – скорость света в вакууме.

Во внесистемных единицах энергия связи ядра равна  $E_{\text{св}} = 931\Delta m$ , где дефект массы  $\Delta m$  – в а.е.м.; 931 – коэффициент пропорциональности (1 а.е.м.  $\sim$  931 МэВ).

### *Цепная ядерная реакция*

Цепная ядерная реакция в уране может быть осуществлена двумя способами. Первый способ заключается в выделении из природного урана делящегося изотопа  $U^{235}$ . Вследствие химической неразличимости изотопов их разделение представляет собой весьма трудную задачу. В куске чистого  $U^{235}$  каждый захваченный ядром нейтрон вызывает деление с испусканием  $\sim 2,5$  новых нейтронов. Однако если масса такого куска меньше критического значения (примерно 1 кг), то большинство испущенных нейтронов вылетает наружу, не вызвав деления. При массе, большей критической, нейтроны быстро размножаются и реакция приобретает взрывной характер. На этом основано действие **атомной бомбы**. Ядерный заряд такой бомбы представляет собой два или более кусков почти чистого  $U^{235}$  (рис. 33.1). Масса каждого куска меньше критического значения, вследствие чего цепная реакция не возникает. Чтобы вызвать взрыв, доста-

точно соединить части ядерного заряда в один кусок с массой, большей критической. Это нужно делать очень быстро, и соединение кусков должно быть очень плотным. Все устройство заключено в массивную оболочку из металла большой плотности. Оболочка служит отражателем нейтронов и, кроме того, удерживает ядерный заряд от распыления до тех пор, пока максимально возможное число его ядер не выделит свою энергию при делении. Цепная реакция в атомной бомбе идет на быстрых нейтронах. При взрыве успевает прореагировать только часть ядерного заряда.

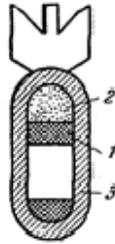


Рис. 33.1

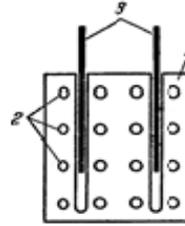


Рис. 33.2

Иной способ осуществления цепной реакции используется в **ядерных реакторах**. В качестве делящегося вещества в реакторах служит природный уран. Чтобы предотвратить радиационный захват нейтронов ядрами  $U^{238}$ , небольшие блоки делящегося вещества размещают на некотором расстоянии друг от друга, а промежутки между блоками заполняют замедлителем, т. е. веществом, в котором нейтроны замедляются до тепловых скоростей (рис. 33.2). Сечение деления  $U^{235}$  тепловыми нейтронами почти в 200 раз больше чем сечение захвата тепловых нейтронов ядром  $U^{238}$ . Поэтому, несмотря на то, что нейтроны сталкиваются с ядрами  $U^{238}$  в 140 раз чаще, чем с ядрами  $U^{235}$ , радиационный захват происходит реже, чем деление ядер. При больших критических размерах всего устройства коэффициент размножения нейтронов может достигнуть значений, больших единицы.

Замедление нейтронов осуществляется за счет упругого рассеяния. В этом случае энергия, теряемая замедляемой частицей, зависит от соотношения масс сталкивающихся частиц. Максимальное количество энергии теряется в случае, если обе частицы имеют одинаковую массу. С этой точки зрения, идеальным замедлителем должно было бы быть вещество, содержащее обычный водород, например вода. Однако такие вещества оказались непригодными в качестве замедлителя, потому что обычный водород поглощает нейтроны. Ядра замедлителя должны обладать малым сечением захвата нейтронов и большим сечением упругого рассеяния. Этому условию удовлетворяют дейтерий, а также ядра графита и бериллия.

### Лекция 34. Элементарные частицы

Под элементарными частицами понимают такие микрочастицы, внутреннюю структуру которых на современном уровне развития физики нельзя представить как объединение других частиц. Во всех наблюдавшихся до сих пор явлениях каждая такая частица ведет себя как единое целое. Элементарные частицы могут превращаться друг в друга.

Первичные космические лучи представляют собой падающий на Землю поток протонов с энергией в среднем  $\sim 10$  ГэВ. Они образуют в земной атмосфере вторичное излучение, в котором встречаются все известные в настоящее время элементарные частицы. Существование магнитного поля Земли приводит к тому, что интенсивность космических лучей меняется с широтой. В результате неупругих столкновений с ядрами атомов в верхних слоях атмосферы возникает вторичное излучение. На высотах ниже 20 км космические лучи практически полностью носят вторичный характер. В составе вторичных космических лучей имеются две компоненты. Одна из них сильно поглощается свинцом и поэтому была названа мягкой; вторая же проникает через большие толщ свинца и получила название жесткой.

Мягкая компонента состоит из каскадов или ливней электронно-позитронных пар.

Возникающий в результате ядерного превращения или резкого торможения быстрого электрона гамма-квант, пролетая вблизи атомного ядра, создает электронно-позитронную пару (рис. 34.1). Торможение этих частиц снова приводит к образованию гамма-квантов. Поскольку энергия первоначального гамма-кванта бывает очень большой, успевает возникнуть много поколений вторичных частиц, прежде чем прекращается развитие ливня. Жесткая, проникающая компонента космических лу-

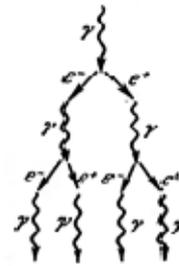


Рис. 34.1

чей состоит в основном из мюонов. Ее образование происходит преимущественно в верхних и средних слоях атмосферы за счет распада заряженных  $\pi$ -мезонов.

Во время полетов искусственных спутников Земли и космических ракет были открыты вблизи Земли радиационные пояса, которые представляют собой две окружающие Землю зоны с резко повышенной интенсивностью ионизирующего излучения. Их существование обусловлено захватом и удержанием электронов и протонов солнечного ветра магнитным полем Земли.

До недавнего времени космическое излучение было единственным источником частиц с энергией, достаточной для образования мезонов и гиперонов. Позитрон, мюоны,  $\pi$ -мезоны и многие странные частицы были первоначально обнаружены в составе космических лучей. Современные ускорители позволяют получать протоны с энергиями первичного космического излучения.

### ***Методы наблюдения элементарных частиц***

Элементарные частицы удается наблюдать благодаря тем следам, которые они оставляют при своем прохождении через вещество. Характер следов позволяет судить о знаке заряда частицы, ее энергии, импульсе и т. п. Заряженные частицы вызывают ионизацию молекул на своем пути. Нейтральные частицы следов не оставляют, но могут обнаружить себя в момент распада на заряженные частицы или в момент столкновения с каким-либо ядром. Следовательно, в конечном счете нейтральные частицы также обнаруживаются по ионизации, вызванной порожденными ими заряженными частицами.

Приборы, применяемые для регистрации ионизирующих частиц, подразделяются на две группы. К первой группе относятся устройства, которые регистрируют факт пролета частицы и, кроме того, позволяют в некоторых случаях су-

дить об ее энергии. Вторую группу образуют так называемые трековые приборы, т.е. приборы, позволяющие наблюдать следы (треки) частиц в веществе. К числу регистрирующих приборов относятся ионизационные камеры и газоразрядные счетчики. Широкое распространение получили также черенковские счетчики и сцинтилляционные счетчики. Заряженная частица, пролетающая через вещество, вызывает не только ионизацию, но и возбуждение атомов. Возвращаясь в нормальное состояние, атомы испускают видимый свет.

### *Классы элементарных частиц и виды взаимодействий*

Для того чтобы объяснить свойства и поведение элементарных частиц, их приходится наделить, кроме массы, электрического заряда и спина, рядом дополнительных, характерных для них величин – квантовых чисел. В настоящее время известны четыре вида взаимодействий между элементарными частицами: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

**Сильное взаимодействие.** Этот вид взаимодействия обеспечивает связь нуклонов в ядре. Интенсивность взаимодействия принято характеризовать безразмерной **константой взаимодействия**  $G^2$ . Эта же константа характеризует вероятность процессов, обусловленных данным взаимодействием. Для сильных взаимодействий  $G^2 = G_s^2 = 1$ . Наибольшее расстояние  $r$ , на котором проявляется сильное взаимодействие, составляет величину примерно  $10^{-13}$  см. Частица, пролетающая со скоростью, близкой к скорости света, в непосредственной близости к другой частице, будет взаимодействовать с ней в течение времени  $\tau = r/c = 10^{-23}$  сек. Сильное взаимодействие характеризуется **временем взаимодействия**  $\tau_s$  порядка  $10^{-23}$  сек.

**Электромагнитное взаимодействие.** Радиус действия электромагнитного взаимодействия не ограничен ( $r \rightarrow \infty$ ). Константа взаимодействия равна

$$G^2 = G_e^2 = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Следовательно, интенсивность электромагнитного взаимодействия примерно в 100 раз меньше, чем сильного. Время, необходимое для того, чтобы проявилось взаимодействие, обратно пропорционально его интенсивности (или вероятности). Поэтому для электромагнитного взаимодействия

$$\tau_e = \tau_s \frac{G_s^2}{G_e^2} \approx 10^{-21} \text{ сек.}$$

**Слабое взаимодействие.** Слабое или распадное взаимодействие ответственно за все виды  $\beta$ -распадов ядер (включая  $K$ -захват), за многие распады элементарных частиц, а также все процессы взаимодействия нейтрино с веществом. Слабое взаимодействие, как и сильное, является короткодействующим. Константа взаимодействия  $G^2 = G_w^2 = 10^{-14}$ . Следовательно, время взаимодействия  $\tau_w \approx 10^{-9}$  сек.

**Гравитационное взаимодействие.** Радиус действия не ограничен ( $r \rightarrow \infty$ ). Константа взаимодействия очень мала:  $G^2 = G_g^2 = 10^{-39}$ . Соответственно время взаимодействия составляет  $\tau_g \approx 10^9$  лет. Гравитационное взаимодействие является универсальным, ему подвержены все без исключения элементарные частицы. Однако в процессах микромира гравитационное взаимодействие играет незначительную роль.

Элементарные частицы делятся на три класса в соответствии с характером взаимодействий, в которых они участвуют:

1. Фотоны, гамма-кванты электромагнитного поля. Эти частицы участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но не обладают сильным и слабым взаимодействиями.

2. Лептоны. К ним относятся частицы, не обладающие сильным взаимодействием: мюоны  $\mu^+$ ,  $\mu^-$ , электроны  $e^+$ ,  $e^-$  и нейтрино  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ . Все лептоны имеют спин, равный  $\frac{1}{2}$ . Для них выполняется принцип Паули. Такие частицы подчиняются статистике Ферми–Дирака и поэтому они называются **фермионами**. Все лептоны обладают слабым взаимодействием. Частицы, имеющие электрический заряд (т. е. мюоны и электроны), обладают также электромагнитным взаимодействием.

3. Адроны. Это сильно взаимодействующие частицы. Наряду с сильным эти частицы обладают также слабым и электромагнитным взаимодействиями. Адроны подразделяются на две подгруппы: мезоны и барионы.

Мезоны – сильно взаимодействующие нестабильные частицы, не несущие так называемого барионного заряда. К их числу принадлежат  $\pi$ -мезоны ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ) и  $K$ -мезоны ( $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ ). Масса  $K$ -мезонов составляет  $\sim 970m_e$ . Время жизни  $K$ -мезонов имеет величину порядка  $10^{-8}$  сек. Они распадаются с образованием  $\pi$ -мезонов и лептонов или только лептонов. Заряженные  $\pi$ -мезоны распадаются в результате слабого взаимодействия с образованием лептонов. Их время жизни значительно превышает ядерные времена. Нейтральный  $\pi^0$ -мезон в результате электромагнитного взаимодействия распадается преимущественно с образованием гамма-квантов. В отличие от лептонов мезоны обладают сильным взаимодействием. Принцип Паули на мезоны не распространяется, так как их спин равен нулю. Частицы с целым (или нулевым) спином подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Поэтому они называются **бозоны**.

Подгруппа барионов объединяет в себе нуклоны ( $p$ ,  $n$ ) и нестабильные частицы с массой, большей массы нуклонов, получившие название гиперонов. Барионы обладают сильным взаимодействием и, следовательно, взаимодействуют с атомными ядрами. Спин всех барионов равен  $1/2$ , так что барионы являются фермионами. За исключением протона, все барионы нестабильны. При распаде бариона, наряду с другими частицами, обязательно образуется барион. Эта закономерность является одним из проявлений закона сохранения барионного заряда.

В последнее время обнаружено несколько десятков короткоживущих частиц, называемых **резонансы**. Эти частицы представляют собой резонансные состояния, образованные двумя или большим числом элементарных частиц. Время жизни резонансов составляет  $10^{-23} \div 10^{-22}$  сек. Распад резонансов происходит за счет сильного взаимодействия. Распад других частиц осуществляется за счет слабого (иногда электромагнитного) взаимодействия. Поэтому времена их жизни значительно больше.

### ***Частицы и античастицы***

Уравнение Шредингера не удовлетворяет требованиям теории относительности – оно не инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца. Релятивистским волновым уравнением является **уравнение Дирака**. Из решения этого уравнения получается спин и численное значение собственного магнитного момента электрона. Таким образом, спин представляет собой величину одновременно и квантовую, и релятивистскую.

Но этим не исчерпывается значение уравнения Дирака. Оно позволило также предсказать существование античастицы электрона-позитрона. Из уравнения Дирака получаются как положительные, так и отрицательные значения полной

энергии свободной частицы. Исследование уравнения показывает, что при заданном импульсе частицы  $p$  существуют решения уравнения, соответствующие значениям энергии:

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}.$$

Между наименьшей положительной энергией  $+m_0 c^2$  и наибольшей отрицательной  $-m_0 c^2$  имеется интервал значений энергий, которые не могут реализоваться. Ширина этого интервала равна  $2m_0 c^2$  (рис. 34.2). Следовательно, существует две области собственных значений энергии: одна в интервале от  $+m_0 c^2$  до  $+\infty$ , а другая в интервале  $-m_0 c^2$  до  $-\infty$ . В макроскопической теории энергия частицы изменяется непрерывно. Частица не может пересечь запрещенную зону и перейти от положительных значений к отрицательным. В квантовой теории энергия частицы может изменяться скачком. Существование запрещенной зоны не может воспрепятствовать переходу частицы в состояния с отрицательной энергией.

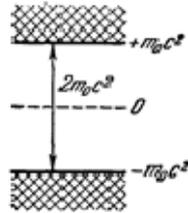


Рис. 34.2

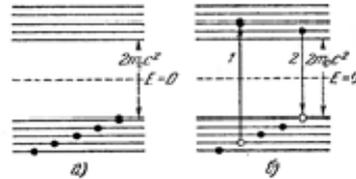


Рис. 34.3

Переходы электронов в состояния с отрицательной энергией обычно не наблюдаются по той причине, что все имеющиеся уровни с отрицательной энергией уже заняты электронами. Электроны подчиняются принципу Паули, который запрещает находиться в одном и том же состоянии более чем одной частице.

**Вакуум** есть такое состояние пространства, в котором все уровни отрицательной энергии заселены электронами, а уровни с положительной энергией свободны (рис. 34.3, *а*).

Так как заняты все энергетические уровни, расположенные ниже запрещенной полосы, электроны на этих уровнях никак себя не обнаруживают. Если одному из электронов, находящихся на отрицательных уровнях, сообщить энергию, превышающую ширину запрещенной зоны  $2m_0c^2$ , то этот электрон перейдет в состояние с положительной энергией и будет вести себя обычным образом, как частица с положительной массой и отрицательным зарядом (рис. 34.3, *б*). Оставшаяся вакансия, или «дырка», образовавшаяся при этом в совокупности отрицательных уровней, должна вести себя как электрон, имеющий положительный заряд. Отсутствие частицы, обладающей отрицательными массой и зарядом, будет восприниматься как наличие частицы с положительной массой и положительным зарядом. Эта первая из предсказанных теоретически частиц была названа **позитроном**. При встрече позитрона с электроном они **аннигилируют** (исчезают). Электрон переходит с положительного уровня на вакантный отрицательный уровень. Энергия, соответствующая разности этих уровней, выделяется в виде излучения. Позитрон был обнаружен в составе космических лучей с помощью камеры Вильсона. Связанное состояние электрона и позитрона называется позитронием. Рождение электронно-позитронных пар происходит при прохождении гамма-квантов через вещество. Согласно уравнению Дирака частицам со спином  $\frac{1}{2}$  соответствуют античастицы.

**Нейтрино** — это единственная частица, которая не участвует ни в сильных, ни в электромагнитных взаимодействиях. Исключая гравитационное взаимодействие, в котором участвуют все частицы, нейтрино может принимать участие только в слабых взаимодействиях. В течение дли-

тельного времени непосредственно наблюдать нейтрино не удавалось. Нейтрино не обладает зарядом и массой. Эта частица слабо взаимодействует с веществом. Только после создания ядерных реакторов, которые являются источниками мощных потоков нейтрино, появилась реальная возможность наблюдать реакции с участием этих частиц.

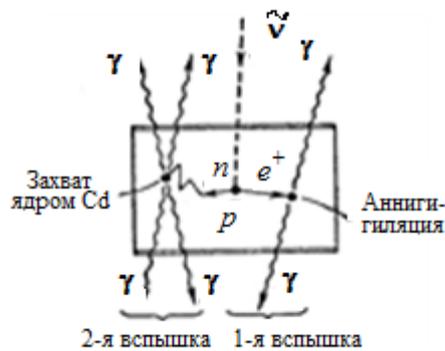


Рис. 34.4

Непосредственное наблюдение антинейтрино было осуществлено в серии опытов по взаимодействию частицы с протоном (рис. 34.4). Свидетельством того, что антинейтрино вступило в реакцию с протоном, служил факт одновременного возникновения нейтрона и позитрона. Позитрон практически сразу же аннигилировал с электроном, что приводило к возникновению двух гамма-квантов. Энергия каждого из них составляла  $0,51 \text{ МэВ}$ . Нейтрон после замедления захватывался ядром кадмия. Образовавшееся в результате возбужденное ядро высвечивало несколько гамма-квантов с суммарной энергией  $9,1 \text{ МэВ}$ .

### Основные законы

**Обобщенная формула Бальмера:**

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = m + 1, m + 2, \dots$$

**Модель атома Томсона.** Электрон в равномерно заряженной сфере совершает гармонические колебания около ее центра под действием электростатической силы  $f = -kr$ .

**Модель атома Резерфорда.** Атом представляет собой систему зарядов, в центре которой расположено тяжелое положительно заряженное ядро, а вокруг ядра расположены отрицательно заряженные электроны.

**Модель атома Бора.** Из бесконечного множества орбит осуществляются те, которые удовлетворяют определенным квантовым условиям. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое.

**Гипотеза Луи де Бройля.** Движение частицы связано с волновым процессом. Его длина волны и частота определяются импульсом и энергией частицы.

**Соотношение неопределенностей Гейзенберга.**  $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$  (для координаты и импульса),  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$  (для энергии и времени).

**Принцип Паули.** В одном и том же атоме не может быть двух электронов, обладающих одинаковой совокупностью четырех квантовых чисел  $n, l, m, m_s$ .

**Закон радиоактивного распада.** Число не распавшихся ядер уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

### Задачи

1. В эксперименте исследовалась дифракция прошедших ускоряющее напряжение электронов на монокристалле никеля. Если ускоряющее напряжение для электронов увеличить в 6 раз, то во сколько раз изменится длина волны де Бройля для электронов?

2. Электрон обладает кинетической энергией  $1 \text{ МэВ}$ . Определить для него длину волны де Бройля.

3. Определить длину волны монохроматического света, при облучении которым водорода наблюдаются три спектральные линии.

4. Определить потенциал ионизации однократно ионизованного атома гелия.

5. Материалом антикатада в рентгеновской трубке служит вольфрам. Определить наименьшую разность потенциалов, которую надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии К-серии.

6. Массовый коэффициент поглощения алюминия для некоторой длины волны рентгеновского излучения равен  $5,3 \text{ м}^2 / \text{кг}$ . При какой толщине слоя алюминия интенсивность пучка рентгеновских лучей этой длины волны уменьшится вдвое?

7. Массовый коэффициент поглощения железа для рентгеновских лучей с длиной волны  $20 \text{ нм}$  равен  $1,1 \text{ м}^2 / \text{кг}$ . Определить ослабление интенсивности рентгеновских лучей при прохождении ими слоя железа толщиной  $0,2 \text{ мм}$ .

8. Время жизни атома в возбужденном состоянии равно  $10 \text{ нс}$ . Определить минимальную ширину энергетического уровня.

9. Число атомов радона уменьшается за сутки на  $18,2 \%$ . Определить для радона постоянную распада.

10. Определить изотоп, который образуется из  ${}_{92}^{238}\text{U}$  после одного  $\alpha$ -распада и двух  $\beta$ -распадов.

11. Определить энергию связи ядра атома гелия  ${}^4_2\text{He}$ .
12. Определить энергию, выделяющуюся при ядерной реакции  ${}^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H}$ .
13. Какой наименьшей энергией должен обладать  $\gamma$ -квант, чтобы произошла реакция  ${}^2_1\text{H} + h\nu \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n}$ .
14. Ускоренный разностью потенциалов  $4,9 \text{ В}$ , электрон сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Определить длину волны фотона, излученного при переходе в нормальное состояние.
15. При работе циклотрона с  $\alpha$ -частицами вырабатывается ионный ток  $20 \text{ мкА}$ . Определить, во сколько раз такой циклотрон эффективнее радиоактивного радия массой  $0,5 \text{ г}$ .
16. Частица находится в прямоугольной одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками шириной  $0,2 \text{ нм}$ . Энергия частицы на втором энергетическом уровне равна  $37,8 \text{ эВ}$ . Чему равна энергия частицы на третьем энергетическом уровне?

---



---

**ПРИЛОЖЕНИЕ**


---



---

**1. Некоторые сведения из алгебры и тригонометрии**

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ $\operatorname{csc}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$ $\sin \alpha \operatorname{csc} \alpha = 1$ $\cos \alpha \sec \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$
$\sin \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$	$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

## 2. Греческий алфавит

Α, α - альфа	Ι, ι - йота	Ρ, ρ - ро
Β, β - бета	Κ, κ - каппа	Σ, σ - сигма
Γ, γ - гамма	Λ, λ - лямбда	Τ, τ - тау
Δ, δ - дельта	Μ, μ - мю	Υ, υ - ипсилон
Ε, ε - эпсилон	Ν, ν - ню	Φ, φ - фи
Ζ, ζ - дзета	Ξ, ξ - кси	Χ, χ - хи
Η, η - эта	Ο, ο - омикрон	Ψ, ψ - пси
Θ, θ, θ̄ - тета	Π, π - пи	Ω, ω - омега

## 3. Некоторые производные

Функция	Производная	Функция	Производная
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n$	$n x^{n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$e^{ax}$	$ae^{ax}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
		$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$

## 4. Некоторые интегралы

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int dx/x = \ln x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x $	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\int u dv = uv - \int u dv$	

## 5. Некоторые сведения о векторах

$\mathbf{a} \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	
$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$	
$\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}] = \mathbf{b} [\mathbf{c} \mathbf{a}] = \mathbf{c} [\mathbf{a} \mathbf{b}]$	
$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b} (\mathbf{a} \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \mathbf{b})$	
$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$	$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt}$
$\frac{d}{dt} (\alpha \mathbf{a}) = \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{a} + \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dt}$	$\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} \right] + \left[ \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right]$

## 6. Основные физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836,15152$
Элементарный заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e = 1,7588047 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Атомная единица массы	$1 \text{ а.е.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

## 7. Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6,378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5,518 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup>
Масса Земли	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6,9599 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1,989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3,844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1,49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Средняя плотность Солнца	$1,41 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup>

## 8. Свойства некоторых жидкостей

Вещество	Плотность, 10 <sup>3</sup> кг/м <sup>3</sup>	Удельная теп- лоемкость, Дж/(кг·К)	Поверхност- ное натяже- ние, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Касторовое масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

## 9. Давление насыщенных паров воды

°С	Давление, кПа	°С	Давление, кПа	°С	Давление, кПа
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101,3

## 10. Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Температура плавления, $^{\circ}\text{C}$	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, $10^{-5} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	—	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	—
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	—	2050	—	—
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	—	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

## 11. Свойства упругости некоторых твердых тел

Вещество	Предел прочности, МПа	Модуль Юнга, ГПа
Алюминий	110	69
Железо	294	196
Медь	245	118
Свинец	20	15,7
Серебро	290	74
Сталь	785	216

## 12. Теплопроводность некоторых твердых тел Вт/(м·К)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавный	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390		

## 13. Некоторые постоянные газов

Газ (относительная молекулярная масса)	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$	Теплопроводность $\kappa$ , $\frac{\text{МВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Вязкость $\eta$ , $\text{мкПа} \cdot \text{с}$	Диаметр молекулы $d$ , нм	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
					$a$ , $\frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}$	$b$ , $10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
He (4)	1,67	141,5	18,9	0,20	—	—
Ar (40)	1,67	16,2	22,1	0,35	0,132	32
H <sub>2</sub> (2)	1,41	168,4	8,4	0,27	0,024	27
N <sub>2</sub> (28)	1,40	24,3	16,7	0,37	0,137	39
O <sub>2</sub> (32)	1,40	24,4	19,2	0,35	0,137	32
CO <sub>2</sub> (44)	1,30	23,2	14,0	0,40	0,367	43
H <sub>2</sub> O (18)	1,32	15,8	9,0	0,30	0,554	30
Воздух (29)	1,40	24,1	17,2	0,35	—	—

Примечание. Значения  $\gamma$ ,  $\kappa$  и  $\eta$  — при нормальных условиях.

## 14. Диэлектрическая проницаемость некоторых диэлектриков

Воск	7,8	Парафин	2	Эбонит	2,6
Вода	81	Слюда	6	Парафинированная бумага	2
Керосин	2	Стекло	6		
Масло	5	Фарфор	6		

## 15. Удельное сопротивление проводников (при 0 °С) в мкОм · м

Алюминий	0,025	Нихром	100
Графит	0,039	Ртуть	0,94
Железо	0,087	Свинец	0,22
Медь	0,017	Сталь	0,10

1

## 16. Работа выхода электронов из металла, эВ

W	4,5	Ag	4,74
W + Cs	1,6	Li	2,4
W + Th	2,63	Na	2,3
Pt + Cs	1,40	K	2,0
Pt	5,3	Cs	1,9

## 17. Показатели преломления

Алмаз	2,42	Сероуглерод	1,63
Вода	1,33	Скипидар	1,48
Лед	1,31	Стекло	1,5—1,9

18. Длина волны, определяющая границу *K*-серии рентгеновских лучей для различных материалов антикатада, пм

Вольфрам	17,8	Платина	15,8
Золото	15,3	Серебро	48,4
Медь	138		

19. Спектральные линии ртутной дуги, нм

253,7	404,7	546,1	612,8
365,0	435,8	577,0	690,8
365,5	523,5	579,1	708,2

20. Массы некоторых изотопов, а.е.м.

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
${}^1_1\text{H}$	1,00783	${}^9_4\text{Be}$	9,01218	${}^{30}_{14}\text{Si}$	29,97377
${}^2_1\text{H}$	2,01410	${}^{10}_5\text{B}$	10,01294	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	39,96257
${}^3_1\text{H}$	3,01605	${}^{12}_6\text{C}$	12,0	${}^{56}_{27}\text{Co}$	55,93984
${}^3_2\text{He}$	3,01603	${}^{13}_7\text{N}$	13,00574	${}^{63}_{29}\text{Cu}$	62,92960
${}^4_2\text{He}$	4,00260	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307	${}^{112}_{48}\text{Cd}$	111,90276
${}^6_3\text{Li}$	6,01512	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913	${}^{200}_{80}\text{Hg}$	199,96832
${}^7_3\text{Li}$	7,01600	${}^{23}_{12}\text{Mg}$	22,99413	${}^{235}_{92}\text{U}$	235,04393
${}^7_4\text{Be}$	7,01693	${}^{24}_{12}\text{Mg}$	23,98504	${}^{238}_{92}\text{U}$	238,05353
${}^8_4\text{Be}$	8,00531	${}^{27}_{13}\text{Al}$	26,98154		

## 21. Периоды полураспада некоторых радиоактивных элементов

$^{45}_{20}\text{Ca}$	164 сут	$^{226}_{88}\text{Ra}$	1590 лет
$^{90}_{38}\text{Sr}$	28 лет	$^{235}_{92}\text{U}$	$7,1 \cdot 10^8$ лет
$^{210}_{84}\text{Po}$	138 сут	$^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,82 сут		

## 22. Обозначение и название некоторых физических величин

А – ампер	Гц – герц	Мкс – максвелл
А – ангстрем	дин – дина	Н – ньютон
а.е.м. – атомная единица массы	Дж – джоуль	П – пуаз
Б – бел	дптр – диоптрия	Па – паскаль
б – барн	К – кельвин	рад – радиан
Бк – беккерель	кал – калория	с – секунда
В – вольт	кд – кандела	См – сименс
Вб – вебер	Кл – кулон	ср – стерadian
Вт – ватт	л – литр	Тл – тесла
Гн – генри	лк – люкс	Ф – фарад
г – грамм	лм – люмен	ч – час
Гс – гаус	м – метр	Э – эрстед
	мин – минута	эВ – электронвольт

## 23. Десятичные приставки к названиям единиц

Э – экса, $10^{18}$	к – кило, $10^3$	мк – микро, $10^{-6}$
П – пета, $10^{15}$	г – гекто, $10^2$	н – нано, $10^{-9}$
Т – тера, $10^{12}$	д – деци, $10^{-1}$	п – пико, $10^{-12}$
Г – гига, $10^9$	с – санти, $10^{-2}$	ф – фемто, $10^{-15}$
М – мега, $10^6$	м – милли, $10^{-3}$	а – атто, $10^{-18}$

---

---

**ЛИТЕРАТУРА**

---

---

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Физматлит, 2014. – Т. 1–5.
2. Савельев И.В. Курс физики. – Т. 1–5. – М.: Лань, 2011.
3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. – М.: Лань, 2008.
4. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. – М.: Лань, 2008.
5. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Физматлит, 2008.
6. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2017.
7. Шпольский Э.В. Атомная физика. – Т. 1–2. – М.: Лань, 2010.
8. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Академия, 2007.
9. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Академия, 2008.
10. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Лань, 2009.
11. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. – М.: Бином, 2010.
12. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Лань, 2010.
13. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Профессия. Книжный мир, 2008.
14. Иродов И.Б. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 2010.
15. Каряка В.И., Кваша И.В., Коновальцева Л.В. Основные законы физики и их изучение в лабораторных работах. – М.: РУДН, 2017.

*Учебное издание*

**Сорокин Валерий Михайлович  
Каряка Владимир Иванович  
Кравченко Николай Юрьевич**

# **ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

Тематический план изданий учебной и научной литературы  
2018 г., № 8

Редактор *И.Л. Панкратова*  
Технический редактор *Н.А. Ясько*  
Компьютерная верстка *Н.А. Ясько*  
Дизайн обложки *Ю.Н. Ефремова*

Подписано в печать 02.04.2019 г. Формат 60×84/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 17,44. Тираж 500 экз. Заказ 951.

---

Российский университет дружбы народов  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

---

Типография РУДН  
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41